



Lehrbuch

der

ebenen Geometrie.

Zum Gebrauche

beim

Unterricht in Realschulen und Gymnasien

so wie zum

Selbstunterrichte.

Von

C. F. Kauffmann,

weiland Professor am Gymnasium in Stuttgart.



Vierte vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 350 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Herausgegeben von

Christian Schwenk,

Professor an der Ober-Realschule, Vorstand der Real-Anstalt in Ludwigsburg,
Ehrenmitglied des polytechnischen Vereins für das Königreich Bayern &c. &c.

Stuttgart.

Verlag von A. Kröner.

1868.





Druck von Gebrüder Mäntler in Stuttgart.



Vorrede zur vierten Auflage.

Der Herausgeber hat dem Wunsche der Verlagshandlung, die vierte Auflage vorliegender Schrift zu besorgen, gerne entsprochen. Schon seit nahezu 30 Jahren liegt das Buch dem Unterricht, den er an der hiesigen Ober-Realschule ertheilt, zu Grunde und ist ihm vielfach lieb geworden; mit dem leider zu früh verewigten Verfasser war er innig befreundet und stand mit ihm in vielseitigem wissenschaftlichem Verkehr.

Diese neue Auflage tritt in einem neuen Gewande vor die Leser. Statt der in den vorhergehenden Auflagen weiß in schwarz gedruckten Holzschnitte finden sich hier schwarz auf weiß gedruckte Figuren und haben dieselben, was Deutlichkeit und Genauigkeit betrifft, gegen die früheren entschiedene Vorzüge, namentlich auch dadurch, daß sie die Augen der Leser weniger anstrengen als jene. Auch sonst wird eine aufmerksame Vergleichung manche Verbesserung finden, ohne daß jedoch die Brauchbarkeit der früheren Auflagen im Unterricht neben der vorliegenden Abbruch erlitten hätte.

In § 8 ist der Herausgeber zu der in den beiden ersten Auflagen gegebenen Erklärung der Ebene, welche wegen ihrer Faßlichkeit für das jugendliche Alter den Vorzug verdient, zurückgekehrt. Um aber auch derjenigen Richtung, welche auf die genetische Erklärung Werth legt, gehörig Rechnung zu tragen, ist in der Anmerkung eine einfache und gründliche Ableitung gegeben.

Um das vorliegende Buch auch für solche Anstalten, die in der Unterrichtszeit beschränkter sind, brauchbarer zu machen, sind

allgemeine Sätze und Aufgaben, welche weggelassen werden können, ohne den wissenschaftlichen Zusammenhang zu stören, mit einem * bezeichnet. Mag man nun diese Sätze dem Privatfleiß der Schüler anheim geben, oder auf die Repetitionen in einem höhern Kurs aufsparen.

In dem Abschnitte über die regelmäßigen Vielecke sind noch einige Aufgaben über deren Konstruktion, wenn eine Seite gegeben ist, hinzugefügt worden. Die praktische Bedeutung solcher Aufgaben wird ihre Aufnahme rechtfertigen.

Bei den Kreisrechnungen ist stets der angenommene Werth von π angegeben und es sind die Resultate für $\pi = 3{,}142$ und $\pi = 3{,}14159$ berechnet.

Möge diese neue Auflage den Freunden der älteren willkommen sein und sich neue Freunde erwerben!

Ludwigsburg im Oktober 1867.

Christian Schwenk.



Grundbegriffe und Erklärungen.

§. 1.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Raumformen, deren drei unterschieden werden können: Körper, Flächen, Linien.

§. 2.

Der Raum ist stetig und nach allen Seiten hin unendlich.

Ein allseitig begrenzter Theil des Raumes heißt Körper.

Die Grenzen, durch welche ein Körper von dem ihn allseitig umgebenden Raum abgesondert oder abgetheilt wird, heißen Flächen.

Die Grenzen einer Fläche, und eben so die Grenzscheiden, wodurch jede Fläche in Abtheilungen getheilt werden kann, nennt man Linien.

Der Ort, wo eine Linie anfängt oder endigt, und ebenso die Grenze, in welcher benachbarte Theile einer Linie zusammenstoßen, heißt Punkt.

§. 3.

Hat man einmal durch Anschauung den Begriff einer Fläche gewonnen, so kann man denselben auch vom Begriffe des Körpers absondern, d. h. man kann sich die Fläche auch unabhängig vom Körper denken. Eben so läßt die Linie sich unabhängig von der Fläche, der Punkt sich unabhängig von der Linie denken.

§. 4.

Denkt man sich einen Punkt in stetig fortschreitender Bewegung, so ist der Weg, den er hiebei zurücklegt, eine Linie.

Eine Linie, die sich stetig fortbewegt, schneidet während ihrer Bewegung den Raum durch, und beschreibt also eine Grenze zwischen zwei benachbarten Raumabtheilungen, d. h. sie beschreibt eine Fläche.

Eine Fläche endlich, in so fern sie allseitig begrenzt ist, erzeugt durch ihre stetige Fortbewegung einen Körper.

§. 5.

Eine Linie ist entweder gerade oder krumm. Die gerade Linie (Gerade) ist ein einfacher Begriff und kann nicht näher erklärt werden; die

Vorstellung derselben liegt unmittelbar in unserem Bewußtsein. — Jede Linie, die weder gerade ist, noch einen geradlinigen Bestandtheil enthält, ist krumm.

§. 6.

1) Durch zwei gegebene Punkte kann nur eine einzige Gerade gezogen werden. Man sagt daher, *eine gerade Linie sei durch zwei Punkte völlig bestimmt.*

2) Man kann die Gerade über die beiden Punkte hinaus in's Unendliche verlängern. Verfolgt man nun in Gedanken die Gerade in ihrer unendlichen Verlängerung, so bekommt man eine Vorstellung von ihrer *Richtung.*

3) Jede Gerade stellt zwei *einander entgegengesetzte* Richtungen dar. Die Verlängerung der Geraden AB kann man entweder in der Richtung von A nach B, oder in der von B nach A verfolgen. Im ersten Falle wird die Gerade durch AB, im zweiten durch BA bezeichnet. Ist es gleichgültig, in welcher Richtung man die Linie betrachtet, so kann man AB oder BA setzen.

4) Durch *einen* Punkt kann man unzählig viele Gerade ziehen, deren jede ihre besondere Richtung hat.

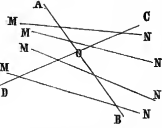
5) Ein durch zwei Punkte begrenztes Stück einer geraden Linie heißt eine *Strecke.*

§. 7.

Zwei gerade Linien von verschiedener Richtung können entweder gar keinen Punkt gemeinschaftlich haben, oder nur *einen einzigen.* Denn hätten sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so würden sie in eine einzige Gerade zusammenfallen (§. 6, 1). — Haben zwei gerade Linien einen Punkt gemeinschaftlich, so sagt man, *sie schneiden sich in diesem Punkte.*

§. 8.

Eine *ebene Fläche* oder *Ebene* ist eine solche Fläche, in welche jede Gerade fällt, die 2 ihrer Punkte verbindet.



Anmerkung. Sobald die 2 folgenden §§ dem Schüler zum Verständniß gebracht sind, so läßt sich zeigen, daß eine Ebene durch die Bewegung einer Geraden auf zwei andern sich schneidenden Geraden entsteht.

Es seien nämlich AB und CD zwei sich schneidende Gerade. Bewegt sich nun eine dritte Gerade MN, welche mit jeder der erstern einen Punkt gemeinschaftlich hat, stetig fort, aber so, daß während ihrer Bewegung stets einer ihrer Punkte in AB, ein anderer in CD liegt,

so beschreibt sie eine Ebene. Nimmt man nun in einer beliebigen Ebene zwei Gerade XY und WZ an, welche sich unter demselben Winkel wie AB und CD schneiden, so ist klar, daß man die zwei sich schneidenden AB und CD mit XY und WZ zur Deckung bringen kann und zwar so, daß AB auf XY und CD auf WZ zu liegen kommt, dann hat die bewegte Gerade MN in jeder ihrer verschiedenen Lagen mit der Ebene, in welcher XY und WZ liegen, stets zwei Punkte gemein und fällt somit in diese Ebene, fällt aber MN in allen Lagen mit der Ebene der XY und WZ zusammen, so ist der von ihr beschriebene Theil des Raumes eine Ebene.

Da die Gerade AB durch die Punkte A und O und CD durch die Punkte C und O bestimmt ist (§. 6, 1), so kann man auch sagen, eine Ebene sei durch drei Punkte, die nicht in einer geraden liegen, bestimmt.

Ebenso ist eine Ebene durch die Schenkel eines Winkels bestimmt.

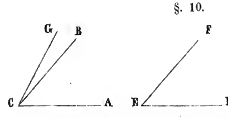
§. 9.

Wenn zwei Gerade, wie CA und CB von einem Punkte C aus nach verschiedener Richtung gehen, so heißt der Unterschied ihrer Richtungen Winkel.

Der Punkt C heißt die Spitze oder der Scheitel, die Linien CA und CB werden die Schenkel des Winkels genannt. Der Winkel selbst wird durch ACB oder BCA bezeichnet, indem man den Buchstaben am Scheitel in die Mitte nimmt.

Wenn keine Zweideutigkeit entsteht, wird der Winkel durch den Scheitelbuchstaben bezeichnet; in vielen Fällen ist es zweckmäßig, denselben durch einen kleinen Buchstaben, der in die Winkelöffnung gesetzt wird, zu bezeichnen z. B. durch x.

§. 10.

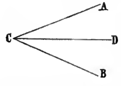


Zwei Winkel sind einander gleich, wenn der Unterschied in den Richtungen der Schenkel bei dem einen so groß ist, wie bei dem andern Winkel. Um die Gleichheit zweier Winkel ACB und DEF zu untersuchen, denkt man sich die Spitze E auf C, den Schenkel ED in die Richtung CA, und den Schenkel EF in die Ebene des Winkel ACB gelegt. Fällt alsdann EF in die Richtung des Schenkels CB, so sind beide Winkel einander gleich. Fällt hingegen der Schenkel EF über CB hinaus, etwa in die Richtung CG, so ist der Winkel ACB kleiner als der Winkel DEF.

Fällt endlich EF zwischen CA und CB, so ist der Winkel ACB größer als der Winkel DEF.

§. 11.

Zieht man aus der Spitze eines Winkels ACB zwischen beiden Schenkeln und in der Ebene desselben eine Gerade CD, so entstehen zwei Winkel ACD und BCD, von denen jeder kleiner ist, als der ganze Winkel ACB. Sind die beiden Winkel ACD und BCD einander gleich, so ist jeder die Hälfte des Winkels ACB und man sagt alsdann, der Winkel ACB werde durch die Gerade CD halbirt.

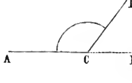


Unter den unzählig vielen Geraden, welche sich aus C, zwischen CA und CB ziehen lassen, gibt es immer eine, aber auch nur eine einzige, welche den Winkel ACB halbirt.

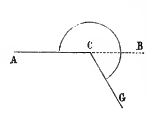
§. 12.

Ein Winkel, dessen Schenkel vom Scheitel aus entgegengesetzte Richtungen haben, heißt ein **flacher** oder **gestreckter** Winkel, wie der Winkel ACB, dessen Schenkel von der Spitze C aus nach entgegengesetzten Richtungen CA und CB gehen.

Ein Winkel, der kleiner ist als ein flacher, heißt ein **hohler** (concaver), wie ACD; ein Winkel aber, der größer ist als ein flacher, heißt ein **erhabener** (converer) Winkel, wie ACG.



Anmerkung. Jeder Winkel, den flachen ausgenommen, ist hohl oder erhaben, je nach der Seite, von welcher man ihn betrachtet. Die erhabene Seite eines Winkels ist diejenige, auf welche die Rückverlängerungen seiner Schenkel (die Verlängerung über die Spitze hinaus) fallen. Bei einem flachen Winkel ist es gleichgültig, von welcher Seite man ihn betrachtet.



§. 13.

Jeder Schenkel eines flachen Winkels ist die **Rückverlängerung** des andern. Legt man daher den ersten Schenkel eines flachen Winkels auf den ersten Schenkel eines andern flachen Winkels, so müssen auch die zweiten Schenkel beider Winkel auf einander fallen, d. h. **alle flachen Winke sind einander gleich.**

§. 14.

Denkt man sich durch die Spitze eines flachen Winkels eine Gerade gezogen, welche ihn in zwei gleiche Winkel theilt, so heißt jeder dieser letzteren ein rechter Winkel, oder kürzer ein Rechter. Ein rechter Winkel ist also die Hälfte eines flachen Winkels. Da nun alle flachen Winkel einander gleich sind (§. 13), so sind auch alle Rechten einander gleich.

§. 15.

Ein Winkel, der kleiner ist als ein Rechter, heißt ein spitzer, und ein Winkel, der größer ist als ein Rechter, aber kleiner als ein flacher Winkel, heißt ein stumpfer Winkel.

Anmerkung. Ein Winkel, der einen spitzen zu einem rechten Winkel ergänzt, heißt das Complement dieses spitzen Winkels.

§. 16.

Wenn man den einen Schenkel CA eines hohlen Winkels ACB, über dessen Spitze C hinaus verlängert, so entsteht ein zweiter Winkel BCD, welcher der Nebenwinkel von ACB genannt wird. Da aber der Schenkel CA auch als die Rückverlängerung von CD erscheint, so ist ACB auch der Nebenwinkel von BCD.

§. 17.

Zwei Nebenwinkel zusammen genommen, bilden einen flachen Winkel. Sind also zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein Rechter (§. 14).

§. 18.

Eine gerade Linie, welche mit einer andern Geraden gleiche Nebenwinkel bildet, heit eine Senkrechte, ein Loth (Perpendikel) auf dieser andern.

In einem Punkt einer Geraden ist nur Ein Loth auf dieselbe möglich.

Bildet eine Linie mit einer andern ungleiche Nebenwinkel, so sagt man sie stehe schief auf dieser andern.

Die Schenkel eines rechten Winkels stehen senkrecht auf einander.

Anmerkung. Die spitzen und stumpfen Winkel begreift man unter der gemeinsamen Benennung: schiefe Winkel.

§. 19.

Eine nach allen Seiten begrenzte Ebene, heißt eine ebene Figur.

Die Linien, durch welche eine Ebene begrenzt werden kann, sind entweder gerade oder krumme. Dem gemäß gibt es geradlinige oder krummlinige ebene Figuren. Eine Figur, die theils von geraden, theils von krummen Linien begrenzt ist, kann man eine gemischtlinige nennen.

Was die geradlinigen ebenen Figuren betrifft, so nennt man sie Drei-

ecke, Vierecke, Vielecke (Polygone), je nachdem sie von drei vier oder mehr geraden Linien begrenzt werden.

Die geraden Linien, welche eine geradlinige ebene Figur begrenzen, nennt man die Seiten derselben. Die Summe aller Seiten einer solchen Figur, oder eine gerade Linie, welche so groß ist, als alle jene Seiten zusammen genommen, nennt man den Umfang (Perimeter) der Figur.

§. 20.

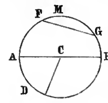
Wenn man sich zwei ebene Figuren so auf einander liegend denken kann, daß sie mit allen ihren Grenzen genau zusammen fallen, und nur eine Figur ausmachen, so heißen sie congruent. Zwei congruente Figuren unterscheiden sich durch nichts weiter, als durch ihre verschiedene Lage im Raum. Man sagt von solchen Figuren: sie decken sich.

§. 21.

Wenn zwei Figuren congruent sind, so sind auch alle die einzelnen Theile (z. B. Seiten und Winkel) derselben gleich, welche bei der Deckung auf einander fallen. Man nennt solche Theile gleichliegende (homologe) Theile der congruenten Figuren.

§. 22.

Diejenige ebene Figur, welche von einer Linie so begrenzt wird, daß alle Punkte dieser Linie von einem gewissen Punkt innerhalb der Figur gleich weit abstehen, heißt ein Kreis.



Die Linie MGBDAF, welche den Kreis begrenzt, heißt die Kreislinie, Peripherie des Kreises. Der Punkt C im Kreise, von welchem alle Punkte der Peripherie gleich weit entfernt sind, heißt Mittelpunkt (Centrum). Jede gerade Linie, vom Mittelpunkte bis zur Peripherie gezogen, wie CD, heißt Halbmesser, Radius. Eine gerade Linie, welche von einem Punkt der Peripherie bis zu einem andern geht, heißt eine Sehne, Chorde, wie FG; eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser, Diameter, wie BA.

Ein einzelner Theil der Kreislinie, wie FMG, heißt ein Bogen. Derjenige Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und einer Sehne begrenzt wird, wie FMG, heißt ein Abschnitt, Segment; und derjenige Theil des Kreises, welcher von einem Bogen und zwei Halbmessern begrenzt wird, wie ACD, ein Ausschnitt, Sector des Kreises.

Man kann sich die Entstehung eines Kreises so denken, daß eine in einer Ebene liegende Gerade CD sich in dieser Ebene um ihren einen, fest gedachten Endpunkt dreht. Bei dieser Drehung beschreibt der andere Endpunkt D die Kreislinie, während der festbleibende Endpunkt C den Mittelpunkt gibt.

Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.

Und da ein Durchmesser immer aus zwei Halbmesser besteht, so sind auch alle Durchmesser eines Kreises gleich.

§. 23.

Die Geometrie heißt niedere oder Elementargeometrie, wenn sie sich mit Linien, die entweder gerade oder Kreislinien sind, mit Ebenen, deren Grenzen Linien der gedachten Art sind, mit einigen krummen Flächen, die auf eine höchst einfache Art durch die gerade Linie oder den Kreis erzeugt werden können, und mit Körpern, deren Grenzen Flächen der gedachten Art sind, beschäftigt.

Derjenige Theil der Geometrie, in welcher außer den eben angeführten Raumformen, krumme Linien und Flächen aller Art, und Körper, welche durch solche Flächen begrenzt sind, betrachtet werden, heißt höhere Geometrie.

Die ebene Geometrie, oder Geometrie der Ebene beschäftigt sich nur mit solchen Linien und Figuren, deren Punkte alle in einer Ebene liegen.

Die Stereometrie, körperliche Geometrie, auch Geometrie im Raum genannt, beschäftigt sich dagegen mit solchen Linien und Gebilden, deren Punkte nicht alle in derselben Ebene liegen.

Der Zweck dieses Lehrbuchs ist die ebene Elementargeometrie.

Allgemeine mathematische Grundsätze.

Jede begränzte Linie läßt sich durch Punkte, die man auf ihr annimmt, in beliebig viele Theile abtheilen, deren jeder wieder eine Linie ist. Ebenso läßt sich eine begrenzte Fläche durch Linien, die man in ihr zieht, in beliebig viele Theile, deren jeder wieder eine Fläche ist, abtheilen. Und ein Körper kann durch Ebenen oder Flächen, die ihn in verschiedenen Abständen schneiden, in beliebig viele Theile abgetheilt werden, deren jeder wieder ein Körper ist. Ein Winkel kann durch gerade Linien, die man aus seiner Spitze zwischen seinen Schenkeln zieht, in so viele Winkel getheilt werden, als man will u. s. w. Denkt man sich nun irgend eines dieser Gebilde in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, so läßt es sich als das Vielfache eines seiner Theile, d. h. als eine Größe betrachten, die durch eine Zahl ausgedrückt werden

kann. In dieser Hinsicht heißen die genannten Raumformen auch **Raumgrößen**, und es finden also die Grundsätze, welche in der allgemeinen Größenlehre in Beziehung auf Größen jeder Art aufgestellt werden, auch auf sie ihre Anwendung.

Diese Grundsätze sind folgende:

I. Jede Größe ist sich selbst gleich.

II. Eine Größe ist allen ihren Theilen zusammengenommen gleich, also größer, als jeder ihrer Theile.

III. Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

IV. Vermehrt man Gleiches um Gleiches, so erhält man Gleiches.

V. Vermindert man Gleiches um Gleiches, so erhält man Gleiches.

VI. Vermehrt man Gleiches um Ungleiches, so erhält man da das Größere, wo man um das Größere vermehrt hat, und das Kleinere, wo man um das Kleinere vermehrt hat. — Vermehrt Ungleiches um Gleiches, so erhält man da das Größere oder Kleinere, wo es zuvor war.

VII. Vermindert man Gleiches um Ungleiches, so erhält man das Größere, wo man um das Kleinere und das Kleinere, wo man um das Größere vermindert hat. — Vermindert man Ungleiches um Gleiches, so erhält man da das Größere oder Kleinere, wo es zuvor war.

VIII. Sind zwei Größen gleich, so sind auch ihre Gleichvielfachen gleich.

IX. Sind zwei Größen gleich, so sind auch ihre gleichvielten Theile, z. B. ihre Hälften &c. gleich.

Erster Abschnitt.

Von den geraden Linien und ihrer gegenseitigen Lage.

---

§. 24.

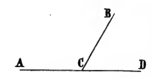
Lehrsatz.

Nebenwinkel sind zusammen so groß als zwei Rechte.

Voraussetzung: ACB und BCD sind Nebenwinkel.

Bewiesen soll werden, daß beide zusammen so groß sind als zwei Rechte.

Beweis.



Die beiden Nebenwinkel ACB und BCD bilden mit einander einen flachen Winkel (§. 17). Ein solcher aber ist so groß als zwei Rechte (§. 14). Folglich sind auch zwei Nebenwinkel so groß als zwei Rechte.

§. 25.

Zusätze.

a) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine die Ergänzung des andern zu zwei Rechten und heißt sein Supplement. So ergänzt der Winkel ACB den Winkel BCD, und umgekehrt der Winkel BCD den Winkel ACB zu zwei Rechten.

b) Ist der eine von zwei Nebenwinkeln kleiner als ein Rechter (ein spitzer Winkel), so ist sein Supplement größer als ein Rechter (also ein stumpfer Winkel), und umgekehrt.

c) Sind zwei Winkel einander gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel (ihre Ergänzungen zu zwei Rechten) gleich.

d) Haben zwei Winkel ein gleiches Supplement, so sind sie selbst einander gleich.

e) Sind zwei Winkel ungleich, so sind auch ihre Supplemente ungleich, und zwar hat der größere Winkel das kleinere Supplement.

f) Zwei Winkel, die ungleiche Supplemente haben, sind ungleich, und zwar ist derjenige Winkel der kleinere, welcher das größere Supplement hat.

g) Die Winkel an einem Punkt auf einer Seite einer Geraden betragen zwei Rechte (§. 14).

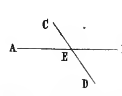
h) Die Winkel um einen Punkt herum betragen vier Rechte.

i) Ein erhabener Winkel ist mit dem dazu gehörigen hohlen Winkel so groß als vier Rechte.

Anmerkung. Die Summe eines hohlen und des zu ihm gehörigen erhabenen Winkels heißt ein voller Winkel. Die Summe mehrerer Winkel kann auch größer ausfallen als ein voller Winkel; z. B. wenn 4 stumpfe Winkel addirt werden. Ein Winkel, der größer ist als ein voller, heißt ein übervoller Winkel.

§. 26.

Erklärung.



Durchschneiden sich zwei gerade Linien AB und CD in einem Punkte E, so entstehen vier Winkel, von welchen je zwei am Scheitel E derartig entgegengesetzt sind, daß die Schenkel des einen Winkels die Rückverlängerungen der Schenkel des andern sind. Solche Winkel nennt man Scheitel-Winkel, wie z. B. AEC und BED, CEB und AED.

§. 27.

Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Voraussetzung. AEC und BED sind Scheitelwinkel (§. 26).

Bewiesen soll werden, daß sie einander gleich sind.

Beweis.

Da AEC und CEB Nebenwinkel sind, so ist der Winkel CEB das Supplement des Winkels AEC; und weil BED und CEB ebenfalls Nebenwinkel sind, so ist CEB auch das Supplement des Winkels BED.

Da also die beiden Winkel AEC und BED ein gleiches Supplement haben, so sind sie gleich (§. 25. d).

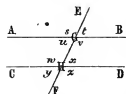
§. 28.

Erklärung.

Wenn zwei in derselben Ebene liegende Gerade AB und CD von einer dritten EF durchschnitten werden, so entstehen an beiden Schnittpunkten acht

Winkel; von diesen nennt man diejenigen, welche zwischen den durchschnittenen Geraden liegen, wie u, w, v und x, innere;

diejenigen, welche außerhalb derselben liegen, wie s, y, t und z, äußere Winkel.



Zwei innere Winkel, welche, ohne Nebenwinkel zu sein, auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden Geraden liegen, wie u und x, v und w, nennt man Wechselwinkel.

Zwei innere Winkel, welche auf derselben Seite der durchschneidenden Geraden liegen, wie u und w, v und x, heißen Gegenwinkel.

Ein innerer und ein äußerer Winkel, welche, ohne Nebenwinkel zu sein, auf einer Seite der durchschneidenden Geraden liegen, wie s und w, u und y, t und x, oder v und z, heißen correspondirende Winkel.

§. 28. a.

Zusätze.

In Beziehung auf die letzte Figur gelten folgende Sätze:

1) Wenn irgend zwei correspondirende Winkel gleich sind, so sind es auch je zwei andere correspondirende Winkel. Sind z. B. s und w gleich, so sind auch t und x gleich, weil sie die Supplemente jener beiden ersten Winkel sind (§. 25. c.). Eben so sind v und z gleich als die Scheitelwinkel der gleichen Winkel s und w u. s. w.

2) Wenn irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind es auch die zwei andern. Ist z. B. u = x, so sind auch v und w gleich, als die Supplemente jener ersten gleichen Winkel.

3) Wenn irgend zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte betragen, so betragen auch die beiden andern zusammen zwei Rechte. Denn die vier innern Winkel u, v, w, x betragen zusammen 4 Rechte (§. 24). Sind nun u und w zusammen zwei Rechte, so sind auch v und x zusammen zwei Rechte.

4) Wenn irgend zwei correspondirende Winkel gleich sind, so sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich.

Es sei z. B. s = w;

da nun $\quad s = v$ (§. 27.)

so ist auch $\quad w = v$ (Grundſ. III.)

Aus der Gleichheit der zwei Wechselwinkel w und v folgt aber, daß auch u = x nach Nr. 2.

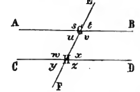
5) Wenn zwei correspondirende Winkel gleich sind, so sind jede zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte. Es sei z. B. s = w. Da nun s mit u

zusammen zwei Rechte beträgt (§. 24), so betragen auch w und u zusammen zwei Rechte. Dann sind aber auch v und x = 2 R (Nr. 3).

6) Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind auch jede zwei correspondirende Winkel gleich.

Es sei z. B. v = w;
da nun v = s (§. 27.)
so ist auch w = s (Grunds. III.)

Aus der Gleichheit der correspondirenden Winkel w und s aber folgt die Gleichheit von je zwei andern correspondirenden Winkeln derselben Figur (Nr. 1).



7) Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind auch jede zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte. Es sei z. B. u = x. Da nun u mit v zusammen 2 R beträgt, so sind auch x und v zusammen zwei Rechte. Dann sind aber auch u und w zusammen zwei Rechte.

8) Wenn zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte betragen, so sind jede zwei correspondirende Winkel gleich. Es betragen z. B. u und w zusammen zwei Rechte. Alsdann ist u die Ergänzung des Winkels w zu zwei Rechten. Der Winkel u ist aber auch die Ergänzung von s zu zwei Rechten. Da also die Winkel s und w gleiche Ergänzung zu zwei Rechten haben, so sind sie gleich. Folglich auch ꝛc.

9) Wenn zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte sind, so sind auch jede zwei Wechselwinkel gleich. Es seien z. B. u und w zusammen zwei Rechte. Alsdann ist u die Ergänzung des Winkels w zu zwei Rechten. Es ist aber u auch die Ergänzung von v zu zwei Rechten; mithin sind die Winkel v und w, weil sie eine gleiche Ergänzung zu zwei Rechten haben, einander gleich. Folglich auch ꝛc. *)

§. 29.

Erklärung.

Zwei gerade Linien in derselben Ebene, welche, ohne sich zu decken, gleiche Richtung haben, heißen **gleichlaufend** oder **parallel**.

Anmerkung. Dieser Erklärung zufolge können zwei parallele Linien nie zusammentreffen, so weit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag. Denn von dem Punkte aus, in welchem sie zusammentreffen würden, hätten sie in ihrer Fortverlängerung sowohl, als auch rückwärts, verschiedene Richtungen, und wären also nicht parallel.

*) Die Einübung dieser Sätze wird dem Anfänger dringend empfohlen.

§. 30.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, und es sind zwei correspondirende Winkel gleich, so sind die Linien parallel.

Voraussetzung. Die Geraden AB und CD werden geschnitten, und es ist AGE = CHG.

Bewiesen soll werden, daß AB und CD parallel sind.

Beweis.

Da die Winkel AGE und CHG gleich sind (Voraussetzung), so ist der Unterschied in den Richtungen der Schenkel AG und GE dem Unterschiede in den Richtungen der Schenkel CH und HG gleich; es hat also AG zu GE die gleiche Richtung, wie CH zu HG. Nun liegen GE und HG in der Geraden EF, mithin haben AG und HG zu EF gleiche Richtung und sind somit parallel.

§. 30. a.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, und es sind zwei Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Voraussetzung. Die Geraden AB und CD werden von EF geschnitten, und es sind die Wechselwinkel AGH und GHD gleich.

Bewiesen soll werden, das AB und CD parallel sind.

Beweis.

Aus der Gleichheit der Wechselwinkel folgt auch die Gleichheit der correspondirenden Winkel (§. 28. a. Nr. 6), hieraus aber, nach §. 30, daß AB und CD parallel sind.

§. 30. b.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und es betragen zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte, so sind beide Linien parallel.

Voraussetzung. Die Geraden AB und CD werden von EF durch-

schnitten, und es betragen die Gegenwinkel AGH und EHG zusammen zwei Rechte.

Bewiesen soll werden, daß AB und CD parallel sind.

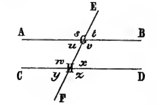
Beweis.

Weil die Gegenwinkel AGH und CHG zusammen zwei Rechte betragen, so sind jede zwei correspondirende Winkel derselben Figur gleich (§. 28. a. Nr. 8); mithin AB und CD parallel (§. 30).

§. 31.

Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind jede zwei dadurch entstehende correspondirende Winkel gleich.



Voraussetzung. Die Geraden AB und CD sind parallel und werden von EF geschnitten.

Bewiesen soll werden, daß z. B. die correspondirenden Winkel AGE und CHG gleich sind.

Beweis.

Weil AB und CD parallel sind, d. h. gleiche Richtung haben, so muß zwischen ihren Richtungen und der Richtung der einen Linie EF der gleiche Unterschied stattfinden, d. h. der Winkel AGE muß gleich dem Winkel CHG sein.

§. 31. a.

Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind jede zwei dadurch gebildete Wechselwinkel gleich.

Voraussetzung. Die Geraden AB und CD sind parallel und werden von EF geschnitten.

Bewiesen soll werden, daß die Wechselwinkel AGH und GHD gleich sind.

Beweis.

Weil AB und CD parallel sind, so sind jede zwei durch sie gebildete correspondirende Winkel gleich (§. 31). Daraus aber folgt die Gleichheit je zweier Wechselwinkel derselben Figur (§. 28. a. Nr. 4).

§. 31. b.

Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind jede zwei dadurch gebildete Gegenwinkel zusammen zwei Rechte.

Voraussetzung. Die Geraden AB und CD sind parallel und werden von EF geschnitten.

Bewiesen soll werden, daß die Gegenwinkel AGH und CHG zusammen zwei Rechte sind.

Beweis.

Weil AB und CD parallel sind, so sind jede zwei correspondirende Winkel dieser Figur gleich; daraus aber folgt (§. 28. a. Nr. 5), daß jede zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte betragen.

§. 32.

Zusätze.

a) Werden also zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, und sind entweder irgend zwei correspondirende, oder irgend zwei Wechselwinkel ungleich, oder irgend zwei innere Gegenwinkel zusammen genommen größer oder kleiner als zwei Rechte, so sind die beiden geraden Linien nicht parallel und müssen sich also, wenn man sie gehörig verlängert, nach einer Seite hin schneiden; auf welcher Seite sie sich aber schneiden werden, kann erst später (§. 39. 7) bestimmt werden.

C E A D F B

b) Zwei gerade Linien CD und EF, welche beide auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel. Denn die beiden correspondirenden Winkel ADC und DFE sind gleich als Rechte, mithin sind die Geraden CD und EF parallel (§. 30).

c) Schneidet eine Gerade EF die eine CD von zwei parallelen Geraden AB und CD, so schneidet sie, gehörig verlängert auch die andere AB.

E G D C F A H B

Denn zieht man GH so sind DGH und GHB zusammen zwei Rechte (§. 31. b), mithin FGH und GHB zusammen kleiner als zwei Rechte; folglich schneiden sich AB und EF (§. 32. a.)

d) Sind zwei Gerade CD und EF parallel und es steht eine dritte AB senkrecht auf der einen, so steht sie auch senkrecht auf der andern.

Denn weil AB die CD schneidet, so schneidet sie gehörig verlängert auch die EF; weil ferner CD und EF parallel sind, so ist ADC = DFE; nun ist ADC ein Rechter, folglich ist auch DFE ein Rechter und somit steht AB auch senkrecht auf EF.

e) Sind zwei gerade Linien einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

f) Durch irgend einen Punkt G kann mit einer Geraden AB immer eine Parallele, aber auch nur eine einzige, gezogen werden.

Ist nämlich durch G die Linie CD parallel mit AB gezogen, so schneidet jede andere durch G gezogene Linie EF die Linie CD; folglich wird auch die mit CD parallele Linie AB von EF geschnitten werden (c).

§. 33.

Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel parallele Schenkel haben, welche vom Scheitelpunkt aus entweder nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung gehen, so sind diese Winkel einander gleich.

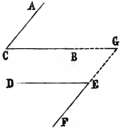
Erste Voraussetzung: In den Winkeln ACB und DEF, deren Schenkel vom Scheitelpunkt aus nach derselben Richtung gehen, sei CA parallel mit ED und CB parallel mit EF.

Bewiesen soll werden, daß diese Winkel gleich sind.

Beweis.

Man verlängere zwei der nicht parallelen Schenkel, z. B. CB und ED, bis sie sich in G schneiden (§. 32. c.),

so ist ACB = BGD } (§. 31. a.)
und BGD = DEF }
also BGD = DEF (Grunds. III.)



Zweite Voraussetzung: In den Winkeln ACB und DFF, deren Schenkel vom Scheitelpunkt aus nach entgegengesetzter Richtung gehen, sei AC parallel mit EF, und CB parallel mit ED.

Bewiesen soll werden, daß diese Winkel gleich sind.

Beweis.

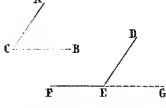
Man verlängere wieder zwei der nicht parallelen Schenkel, z. B. CB und FE, bis sie sich in G schneiden.

	Nun ist ACB = BGE (§. 31. a.).
und	BGE = DEF (§. 31.)
mithin	ACB = DEF (Grundsatz III.)

* §. 34.

Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel parallele Schenkel haben, von denen das eine Paar vom Scheitelpunkt aus nach derselben, das andere Paar aber nach entgegengesetzter Richtung geht, so sind diese Winkel zusammen so groß als zwei Rechte.



Voraussetzung. In den beiden Winkeln ACB und DEF sind die Schenkel CA und ED parallel, und gehen vom Scheitelpunkt aus nach derselben Richtung; ebenso sind auch die Schenkel CB und EF parallel, gehen aber vom Scheitelpunkt aus nach entgegengesetzter Richtung.

Bewiesen soll werden, daß diese Winkel zusammen so groß sind, als zwei Rechte.

Beweis.

Man zeichne zu einem der beiden Winkel, z. B. zu DEF, seinen Nebenwinkel DEG (indem man FE über den Scheitel hinaus verlängert), so ist ACB = DEG (§. 33. 1).

Da nun DEG und DEF zusammen so groß sind als zwei Rechte, so müssen auch ACB und DEF zusammen so groß als zwei Rechte sein.

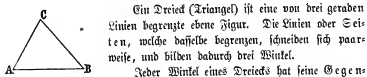
Zweiter Abschnitt.

Von den geradlinigen Figuren und der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Seiten und Winkel.

A. Das Dreieck.

§. 35.

Erklärungen.



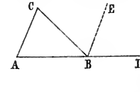
Ein Dreieck (Triangel) ist eine von drei geraden Linien begrenzte ebene Figur. Die Linien oder Seiten, welche dasselbe begrenzen, schneiden sich paarweise, und bilden dadurch drei Winkel.

Jeder Winkel eines Dreiecks hat seine Gegenseite, und jede Seite ihren Gegenwinkel. So ist z. B. in dem Dreieck ABC die Seite AB die Gegenseite des Winkels ACB.

§. 36.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck eine Seite verlängert, so ist der dadurch entstehende Außenwinkel so groß als diejenigen beiden Winkel im Dreieck zusammengenommen, welche nicht seine Nebenwinkel sind (und welche man auch die dem Außenwinkel entgegengesetzten Winkel nennt).



Voraussetzung. Man hat in dem Dreieck ABC die Seite AB nach D verlängert.

Bewiesen soll werden, daß der dadurch entstandene Außenwinkel CBD so groß ist, als die Winkel CAB und ACB im Dreieck zusammen genommen.

Beweis.

Durch B denke man sich eine Linie BE parallel mit AC gezogen.

Nun ist W. EBD = W. CAB (§. 31.)
und W. EBC = W. ACB (§. 31. a).

also W. EBD + W. EBC = W. CAB + W. ACB (Grundſ. IV.)
d. i. W. CBD = W. CAB + W. ACB.

§. 37.

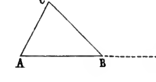
Zusatz.

Der Außenwinkel eines Dreiecks ist also immer größer als einer der beiden innern ihm entgegengesetzten Winkel.

§. 38.

Lehrsatz.

Die drei innern Winkel eines Dreiecks sind zusammen genommen so groß als zwei Rechte.



Voraussetzung. CAB, CBA und ACB sind die drei innern Winkel eines Dreiecks.

Bewiesen soll werden, daß sie zusammen genommen so groß sind als zwei Rechte.

Beweis.

Man verlängere AB über B hinaus,

so ist W. CBD = W. ACB + CAB (§. 36);
mithin auch W. CBD + CBA = W. ACB + CAB + CBA;
da nun W. CBD + CBA = 2 R. (§. 24)
so ist auch W. ACB + CAB + CBA = 2 R. (Grundſ. III.)

§. 39.

Zusätze.

1) Die Summe je zweier Winkel eines Dreiecks ist immer kleiner als zwei Rechte.

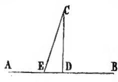
2) Ist in einem Dreieck einer der drei Winkel ein stumpfer, so ist jeder der beiden andern Winkel ein spitziger.

3) Ist in einem Dreieck einer der drei Winkel ein rechter, so ist die Summe der beiden andern Winkel ebenfalls ein rechter, mithin jeder derselben ein spitziger Winkel.

4) Wenn in einem Dreieck die Summe zweier Winkel so groß ist als der dritte, so ist dieser dritte Winkel ein rechter. Denn er ist die Hälfte von der Summe der drei Winkel im Dreieck.

5) Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel beziehungsweise einander gleich, so ist auch der dritte Winkel im einen Dreieck so groß als der dritte im andern.

6) Von einem Punkte C aus läßt sich nur eine Senkrechte auf eine Gerade AB fällen. Denn steht z. B. CD senkrecht auf AB, so bildet jede andere aus C nach AB gezogene Linie, z. B. CG mit ersterer schiefe Winkel, weil in dem bei D rechtwinkligen Dreieck CDG der Winkel CGD ein spitziger ist (3); CG steht also schief auf AB (§. 18).





7) Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF so geschnitten, daß zwei innere Gegenwinkel BGH und DHG zusammen genommen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich die beiden Geraden AB und CD nach derjenigen Seite zu, wo diese Winkel liegen.

Daß sich die Geraden AB und CD schneiden müssen, ist schon in §. 32. a. bewiesen worden. Schnitten sie sich nun nicht auf der bezeichneten Seite, so müßten sie sich nach derjenigen Seite zu schneiden, wo die Winkel AGH und CHG liegen. Es müßte also auf dieser Seite ein Dreieck entstehen, das die beiden letztgenannten Winkel enthielte. Diese müßten also zusammen genommen kleiner sein als zwei Rechte (§. 39. 1). Alsdann aber wären BGH und DHG zusammen größer als zwei Rechte, was der Voraussetzung widerspricht. Die beiden Geraden AB und CD müssen sich also nach der Seite hin schneiden, wo die beiden letzteren Winkel liegen.

*8) Wenn man aus einem Punkte, der außerhalb eines gegebenen Winkels und auch außerhalb seines Scheitelwinkels liegt, Senkrechte auf seine Schenkel oder deren Verlängerungen fällt, so ist der Winkel, den diese Senkrechten einschließen, dem gegebenen Winkel gleich.

*9) Wenn man aus einem Punkte, der innerhalb eines gegebenen Winkels, oder auch innerhalb seines Scheitelwinkels liegt, Senkrechte auf seine Schenkel oder deren Verlängerungen zieht, so ergänzt der Winkel, den die Senkrechten einschließen, den gegebenen Winkel zu zwei Rechten.

§. 40.

Erklärung.

In Ansehung der Größe der Seiten nennt man ein Dreieck
gleichseitig, wenn die drei Seiten desselben gleich groß sind;
gleichschenklig, wenn nur zwei Seiten desselben gleich sind; und
ungleichseitig, wenn keine Seite in demselben der andern gleich ist.

In Ansehung der Winkel heißt aber ein Dreieck

spitzwinklig, wenn die drei Winkel desselben spitzige sind;

stumpfwinklig, wenn einer der drei Winkel ein stumpfer,

rechtwinklig, wenn einer der drei Winkel ein rechter ist.

In einem rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Katheten, und die Gegenseite desselben Hypotenuse.

In einem gleichschenkligen Dreieck heißen die gleichen Seiten Schenkel, die ungleiche Grundlinie. Der Scheitel des Gegenwinkels der Grundlinie heißt die Spitze des Dreiecks.

Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 41.

Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks nebst dem eingeschlossenen Winkel einzeln verglichen so groß sind als in einem andern, so sind die Dreiecke congruent.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF ist

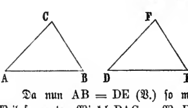
AB = DE

AC = DF

und W. BAC = W. EDF.

Bewiesen soll werden, daß die Dreiecke congruent sind.

Beweis.



Man denke sich das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF gelegt, daß der Punkt A auf D und die Seite AB in die Richtung von DE falle.

Da nun AB = DE (V.) so muß auch der Punkt B auf E fallen. Weil ferner der Winkel BAC = W. EDF (V.), so muß die Seite AC in die Richtung DF fallen; und da AC = DF (V.), so fällt sodann auch der Punkt C auf F. Da also der Punkt B auf E und der Punkt C auf F zu liegen kommt, so muß die Linie BC auf EF fallen. Beide Dreiecke fallen also mit ihren Grenzen vollkommen auf einander und sind daher congruent (§. 20).

Zu dieser Congruenz der beiden Dreiecke ist aber auch die Congruenz, und somit die Gleichheit der übrigen homologen Theile mitbegriffen, d. h. es ist auch BC = EF,

W. ACB = W. DFE, und

W. ABC = W. DEF (§. 21).

§. 42.

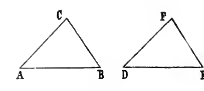
Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel und eine gleichliegende Seite in zwei Dreiecken einzeln verglichen gleich groß sind, so sind die Dreiecke congruent.

Erste Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei

W. CAB = W. FDE,

W. CBA = W. FED;



ferner sei die an den beiden Winkeln CAB und CBA anliegende Seite AB im Dreieck ABC ihrer gleichliegenden (nämlich der an den beiden Winkeln FDE und FED anliegenden Seite) DE im Dreieck DEF gleich.

Bewiesen soll werden, daß die Dreiecke congruent sind.

Beweis.

Man denke sich das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF gelegt, daß der Punkt A auf D, und die Seite AB in die Richtung DE falle, so wird auch der Punkt B auf E fallen, weil AB = DE (V.). Da nun der Winkel CAB = FDE (V.), so muß die Seite AC und mithin auch ihr Endpunkt C in die Richtung DF fallen. Da ferner der Winkel CBA = FED (V.), so muß die Seite BC und mithin auch ihr Endpunkt C in die Richtung EF fallen. Da also der Punkt C sowohl in der Richtung von EF, als von DF fallen soll, so muß er in ihren Durchschnittspunkt F fallen. Das Dreieck ABC fällt also vollkommen auf das Dreieck DEF, d. h. es ist mit demselben congruent.

Es ist also auch

AC = DF, BC = EF, und der W. ACB = W. DFE.

Zweite Voraussetzung: In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei W. CAB = W. FDE,

W. ACB = W. DFE;

ferner sei die Gegenseite AB des Winkels ACB im gleichnamigen Dreieck, ihrer gleichliegenden DE (nämlich der Gegenseite des Winkels DFE) im Dreieck DEF gleich.

Bewiesen soll werden, daß beide Dreiecke congruent sind.

Beweis.

Da Winkel CAB = Winkel FDE, und Winkel ACB = Winkel DFE (V.), so muß auch Winkel CBA = Winkel FED sein (§. 39. 5).

Nun kann der Beweis geführt werden, wie vorhin.

§. 43.

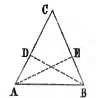
Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich sind, so sind es auch ihre Gegenwinkel.

Voraussetzung. In dem Dreieck ABC ist AC = BC.

Bewiesen soll werden, daß der Winkel ABC = Winkel BAC.

Erster Beweis.



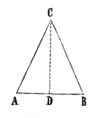
Man nehme auf einer der beiden gleichen Seiten, z. B. auf AC den Punkt D willkürlich an, und mache alsdann BE = AD. Es wird nun auch EC = DC sein. (Grundſ. V.)

Nun ist in den beiden Dreiecken AEC und BDC die Seite AC (im Dreieck AEC) gleich der Seite BC im Dreieck BDC) (V.); ferner EC (im Dreieck AEC) gleich DC (im Dreieck BDC); endlich ist der Winkel C beiden Dreiecken gemeinschaftlich; folglich sind Letztere congruent (§. 41) und daher auch die Seite AE = BD und der Winkel AEC = BDC (§. 21); woraus dann auch die Gleichheit der Supplemente ADB und BEA folgt (§. 25. c.).

Da nun ferner in den beiden Dreiecken ADB und BEA die Seite AD (im Dreieck ADB) gleich der Seite BE (im Dreieck BEA) (Constr.), und BD (im Dreieck ADB) gleich AE (im Dreieck BEA), wie oben gezeigt worden, und endlich der Winkel ADB (im Dreieck ADB) gleich ist dem Winkel BEA (im Dreieck BEA), so sind auch diese Dreiecke congruent.

Hieraus aber folgt, daß der Winkel DAB = EBA, oder was dasselbe ist, der Winkel BAC = ABC.

* Anderer Beweis.



Man denke sich in dem Dreieck ABC den Winkel C durch die Linie CD halbirt.

Nun ist in den beiden Dreiecken ACD und BCD die Seite AC = BC (V.), DC = DC, und der Winkel ACD = Winkel BCD (Constr.); mithin sind diese Dreiecke congruent (§. 41), und daher der Winkel BAC = ABC.

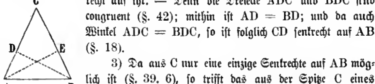
Anmerkung. Man drückt diesen Lehrsatz gewöhnlich so aus: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

*§. 43. a.

Zusätze.

1) Wenn man aus der Spitze C (2. Fig. S. 25) eines gleichschenkligen Dreiecks ABC eine Gerade CD nach der Mitte der Grundlinie zieht, so steht CD senkrecht auf der Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze. Denn weil in den beiden Dreiecken ADC und BDC die Seite AD = BD, AC = BC und Winkel CAD = W. CBD, so sind sie congruent; mithin auch Winkel ADC = W. BDC und folglich ist CD senkrecht auf AB (§. 18). Aus der Congruenz der beiden Dreiecke folgt aber auch, daß W. ACD = W. BCD, d. h. daß der Winkel ACB an der Spitze durch CD halbirt wird.

2) Wenn eine Gerade CD den Winkel ACB an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbirt, so halbirt sie auch die Grundlinie und steht senkrecht auf ihr. — Denn die Dreiecke ADC und BDC sind congruent (§. 42); mithin ist AD = BD; und da auch Winkel ADC = BDC, so ist folglich CD senkrecht auf AB (§. 18).



3) Da aus C nur eine einzige Senkrechte auf AB möglich ist (§. 39. 6), so trifft das aus der Spitze C eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Loth dieselbe in der Mitte und halbirt den Winkel an der Spitze.

4) Da aus der Mitte D von AB nur Ein Loth auf AB möglich ist (§. 18), so geht ein auf der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks errichtetes Loth durch die Spitze eben dieses Dreiecks (Fig. 44, 2. Bem.).

5) Ist der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks gegeben, so sind auch die beiden Winkel an der Grundlinie bekannt. Denn jeder von ihnen ist gleich dem Unterschied eines Rechten und des halben Winkels an der Spitze.

6) In einem gleichschenkligen Dreieck kann kein anderer Winkel ein Rechter sein, als der an der Spitze; alsdann ist jeder Winkel an der Grundlinie gleich der Hälfte eines Rechten.

7) Sind in einem Dreieck die 3 Seiten gleich, so sind es auch die 3 Winkel, und jeder derselben ist zwei Drittheile eines Rechten.

§. 44.

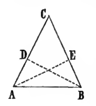
Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind es auch ihre Gegenseiten.

Voraussetzung. In dem Dreieck ABC sei Winkel BAC = W. ABC.
Bewiesen soll werden, daß die Seite AC = BC.

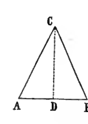
Erster Beweis.

Man nehme auf AC das Stück AD beliebig, und mache BE = AD. Nun ist in den beiden Dreiecken ADB und BEA die Seite AD (im Dreieck ADB) gleich BE (im Dreieck BEA) (Constr.); AB (im Dreieck ADB) gleich AB (im Dreieck BEA), und Winkel DAB (im Dreieck ADB) gleich Winkel EBA (im Dreieck BEA) (V.). Folglich sind diese Dreiecke congruent (§. 41), und daher BD = AE und Winkel ADB = Winkel BEA §. 21), woraus auch die Gleichheit der Supplemente CDB und CEA folgt.



Nun ist ferner in den beiden Dreiecken AEC und BDC die Seite AE (im Dreieck AEC) gleich BD (im Dreieck BDC); der Winkel CDB (im Dreieck BDC) gleich dem Winkel CEA (im Dreieck AEC), und der Winkel C beiden Dreiecken gemeinschaftlich; folglich sind diese congruent (§. 42), und daher die Seite AC = BC.

* Anderer Beweis.



Man denke sich in dem Dreieck ABC den Winkel ACB durch die Linie CD halbirt, so ist in den beiden Dreicken ADC und BDC der Winkel A = Winkel B (V.); der Winkel ACD = Winkel BCD (Constr.) und CD = CD; mithin sind die Dreiecke kongruent (§. 42), und daher AC = BC.

§. 45.

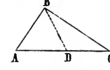
Zusatz.

Sind in einem Dreiecke die drei Winkel gleich, so sind es auch die drei Seiten.

§. 46.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten ungleich sind, so sind es auch ihre Gegenwinkel, und zwar hat die größere Seite den größeren Gegenwinkel.



Voraussetzung. In dem Dreieck ABC ist AC größer AB.

Bewiesen soll werden, daß auch der Winkel ABC größer ist, als der Winkel ACB.

Beweis.

Da AC größer ist als AB, so läßt sich von AC ein Stück abschneiden, das so groß ist als AB. Dieses Stück sei AD. Zieht man nun die Linie BD, so ist in dem Dreieck ABD die Seite AB = AD, mithin der Winkel ADB = Winkel ABD (§. 43).

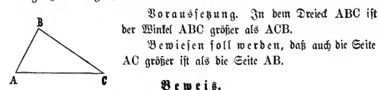
Der Winkel ADB aber ist, als Außenwinkel von dem Dreieck BCD, größer als der Winkel C (§. 37); es muß also auch Winkel ABD größer sein als Winkel C.

Ist aber schon Winkel ABD größer als der Winkel C, so muß auch Winkel ABC größer sein als Winkel C oder Winkel ACB.

§. 47.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel ungleich sind, so sind es auch die Gegenseiten derselben, und zwar hat der größere Winkel eine größere Gegenseite.



Voraussetzung. In dem Dreieck ABC ist der Winkel ABC größer als ACB.

Bewiesen soll werden, daß auch die Seite AC größer ist als die Seite AB.

Beweis.

Wäre die Seite AC nicht größer als AB, so müßte erstere der letztern entweder gleich, oder sie müßte kleiner als dieselbe sein.

Angenommen, AC sei gleich AB, so müßte nach §. 43 auch der Winkel ABC = Winkel ACB sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Nähme man dagegen an, AC sei kleiner als AB, so müßte Winkel ABC kleiner sein als der Winkel ACB (§. 46), was der Voraussetzung ebenfalls widerspricht.

Es kann also AC weder gleich AB, noch keiner als AB sein.

Es muß daher AC größer als AB sein.

§. 48.

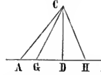
Zusätze.

1) In einem stumpfwinkligen Dreieck ist die Gegenseite des stumpfen Winkels, und in einem rechtwinkligen die Hypotenuse die größte Seite (§. 47).

2) Unter allen geraden Linien, die man von einem Punkte C nach einer Geraden AB ziehen kann, ist die Senkrechte CD die kürzeste. Denn

jede andere Gerade, z. B. CG, ist in dem bei D rechtwinkligen Dreiecke CGD die Hypotenuse, also größer als CD.

Anmerkung. Man nennt die Senkrechte CD die Entfernung des Punktes C von der Geraden AB.



3) Von zweien aus C nach AB gezogenen schiefen Linien CG und CA ist diejenige die kürzere, deren Fußpunkt näher am Fußpunkt des Lothes liegt; hier also CG.

Weil nämlich CGD ein spitzer Winkel ist, so muß sein Nebenwinkel CGA ein stumpfer sein (§. 25, b). Daher ist AC die größte Seite im Dreieck CGA (1.), mithin größer als CG.

4) Hat man auf der einen Seite des Lothes CD eine schiefe Linie CG aus C nach AB gezogen, so läßt sich auf der andern Seite eine (aber nur eine) ihr gleiche schiefe Linie CH ziehen, wenn man die Entfernungen der Fußpunkte beider vom Lothe gleich, hier also DH = DG macht. Denn in den beiden Dreiecken GDC und HDC ist GD = HD (Constr.), CD = CD, und Winkel GDC = Winkel HDC als Rechte; mithin sind die Dreiecke congruent (§. 41), also CG = CH.

5) Aus einem Punkte C lassen sich nur immer je zwei gleiche gerade Linien nach AB ziehen.

Denn jede dritte Linie CA, die außerhalb der beiden gleichen Geraden CG und CH liegt, wird größer, und jede dritte, die innerhalb derselben liegt, kleiner sein (3.).

§. 49.

Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen genommen größer als die dritte.

Voraussetzung. ABC ist ein Dreieck.

Bewiesen soll werden, daß je zwei Seiten, z. B. AB und BC, zusammen größer sind als die dritte AC.

Beweis.

Man verlängere AB, mache die Verlängerung BD = BC und ziehe DC.

Da nun in dem Dreieck CBD die Seite BD = BC, so ist auch Winkel BCD = W. BDC (§. 43), und daher W. ACD größer als Winkel ADC. Deßwegen muß in dem Dreieck ACD die Seite AD oder die Summe der beiden Seiten AB und BC (Constr.) größer sein als AC (§. 47).

§. 49. a.

Lehrsatz.

In jedem Dreieck ist der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

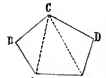
Der Beweis stützt sich auf §. 49 und Grundsatz VII. zweiter Theil.

§. 50.



Zusätze.

1) Jede zwischen zwei Punkten A und E liegende gebrochene Linie ABCDE ist größer als die gerade AE.



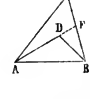
Denn es ist $AB + BC > AC$ und $CD + DE > CE$ (§. 49.)

also auch $AB + BC + CD + DE > AC + CE$;

da aber $AC + CE > AE$ (§. 49.)

so ist auch $AB + BC + CD + DE > AE$.

2) Werden von einem Punkte D innerhalb eines Dreiecks ABC zwei gerade Linien AD und BD nach den Endpunkten einer Seite AB gezogen, so sind diese beiden Geraden zusammen genommen kleiner als die beiden andern Seiten AC und CB des Dreiecks.



Denn verlängert man AD nach F, so ist nach §. 49:

$$BD < BF + DF$$

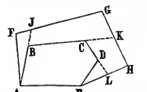
und AF oder $AD + DF < AC + CF$

also $AD + DF + BD < AC + CF + BF + DF$

oder $AD + DF + BD < AC + CB + DF$

mithin auch $AD + BD < AC + CB$.

3) Jede zwischen zwei Punkten A und E gezogene gebrochene Linie ABCDE ist kleiner als die umschriebene AFGHE, wenn nur erstere durchaus hohl ist gegen die Gerade AE. — Denn es ist



$$AB + BJ < AF + FJ$$
$$BC + CK < BJ + JG + GK$$
$$CD + DL < CK + KH + HL$$
$$DE < DL + LE.$$

Addirt man nun auf beiden Seiten und läßt links und rechts die gleichnamigen Linien weg, so erhält man $ABCDE < AFGHE$. Auf eine ähnliche Art kann der Beweis für jede andere Figur geführt werden.

4) Jede zwischen A und E gezogene krumme Linie ist größer als die gerade AE, insofern man sich eine krumme Linie als eine in's Unendliche gebrochene Linie vorstellen kann (Nr. 3).

5) Eben deßwegen ist auch von zwei, zwischen A und E gezogenen krummen Linien die innere die kleinste, wenn sie nur ihre hohle Seite der Geraden AE zugekehrt hält (Nr. 3).

§. 51.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehungsweise einander gleich sind, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel aber im ersten Dreieck größer ist als im andern, so ist auch die Gegenseite dieses Winkels im ersten Dreieck größer als im andern.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken

ABC und DEF sei $AC = DF$
$BC = EF$
und Winkel $ACB > DFE$.

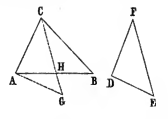
Bewiesen soll werden, daß auch $AB > DE$.

Beweis.

Durch eine Linie CG, welche man zwischen den Schenkeln des größern Winkels aus der Spitze desselben zieht, schneide man ein Stück ACG von demselben ab, welches dem kleineren Winkel DFE gleich ist.

Die Linie CG mache man gleich FE und ziehe AG, so werden die beiden Dreiecke ACG und DFE congruent sein (§. 41), weil $AC = DF$ (V.) $CG = FE$ (Constr.) und Winkel $ACG = DFE$ ist (Constr.); daher ist auch $AG = DE$.

Da ferner $CG = FE$, und $FE = CB$ (V.), so ist auch $CG = CB$ (Grunds. III.)



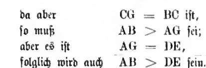
Hinsichtlich der Figur sind nun drei Fälle möglich;

1) Der Punkt G kann außerhalb des Dreiecks ABC;

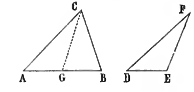
2) Er kann auf AB;

3) Er kann in das Dreieck ABC fallen.

Im ersten Falle $BH + CH > BC$
und $AH + GH > AG$
mithin $BH + AH + CH + GH > BC + AG$
oder $AB + CG > BC + AG$.



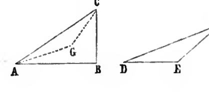
da aber $CG = BC$ ist,
so muß $AB > AG$ sei;
aber es ist $AG = DE$,
folglich wird auch $AB > DE$ sein.



Für den zweiten Fall ist AB größer als sein Theil AG; weil aber $AG = DE$, so ist auch $AB > DE$.



Für den dritten Fall ist

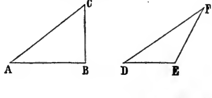


$AB + BC > AG + GC$ (§. 50. 2.)
Da aber $BC = GC$,
so ist auch $AB > AG$;
und weil $AG = DE$,
so ist auch $AB > DE$.

§. 52.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehungsweise einander gleich sind, die dritte Seite im ersten Dreieck aber größer ist, als die dritte Seite im andern, so ist auch der Gegenwinkel dieser dritten Seite im ersten Dreieck größer als der Gegenwinkel der dritten Seite im andern.



Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF ist $AC = DF$, $BC = EF$, und $AB > DE$.

Bewiesen soll werden, daß Winkel $ACB > DFE$.

Beweis.

Wäre der Winkel ACB nicht größer als DFE, so müßte er entweder eben so groß oder kleiner als letzterer sein.

Angenommen, er sei eben so groß, so wären die Dreiecke ABC und

DEF congruent (§. 41) und also AB = DE, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre hingegen Winkel ACB < Winkel DFE, so wäre auch AB < DE (§. 51), was der Voraussetzung ebenfalls widerspricht.

Der Winkel ACB kann also weder eben so groß, noch kleiner als DFE sein; folglich muß er größer sein als DFE.

§. 53.

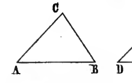
Lehrsatz.

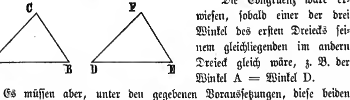
Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten beziehungsweise einander gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei AB = DE, AC = DF, und BC = EF.

Bewiesen soll werden, daß die Dreiecke congruent sind.

Erster Beweis.





Die Congruenz wäre erwiesen, sobald einer der drei Winkel des ersten Dreiecks seinem gleichliegenden im andern Dreieck gleich wäre, z. B. der Winkel A = Winkel D.

Es müssen aber, unter den gegebenen Voraussetzungen, diese beiden Winkel gleich sein. Denn wäre Winkel A < Winkel D, so wäre BC < EF (§. 51); wäre hingegen Winkel A < Winkel D, so wäre BC < EF (§. 51), welches beides gegen die Voraussetzung ist.

Der Winkel A kann also weder größer noch kleiner als der Winkel D sein; folglich muß er so groß sein als der Winkel D. Dann aber sind die Dreiecke nach §. 41 congruent.

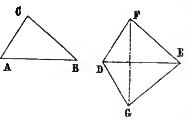
Aus dieser Congruenz folgt sodann auch die Gleichheit der übrigen homologen Theile, d. h. es ist auch

Winkel C = F, und
Winkel B = E.

* Zweiter Beweis.

Man lege das Dreieck ABC so an das Dreieck DEF, daß AB auf DE, das Dreieck ABC selbst aber auf die entgegengesetzte Seite von DE zu liegen komme, so daß der Punkt C in G falle. Alsdann stellt also DGE

das Dreieck ABC in der angegebenen Lage dar. Man verbinde nun die Spitzen F und G durch die Gerade FG. Nun ist in dem Dreieck FDG die Seite DF = DG, mithin Winkel DFG = Winkel DGF (§. 43); eben so ist in dem Dreieck FEG die Seite FE = GE, mithin Winkel EFG = Winkel EGF. Daher auch Winkel DFG + EFG = Winkel DGF + EGF, d. h. Winkel DFE = Winkel DGE. Da aber Winkel DGE = Winkel ACB, so ist auch Winkel DFE = Winkel ACB. Die Dreiecke ACB und DEF sind also congruent (§. 41).



Anmerkung. Man erhält für Dreiecke jeder Art immer diese Figur, wenn man sie mit der Gegenseite des größten Winkels an einander legt.

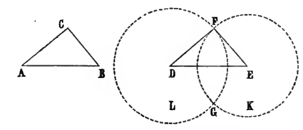
* Dritter Beweis.

Man beschreibe aus den Eckpunkten D und E des Dreiecks DEF mit den Halbmessern DF und EF die Kreise L und K, welche sich in F und G schneiden werden.

Nun denke man sich das Dreieck ABC so auf DEF gelegt, daß der Punkt A auf D und die Seite AB in die Richtung DE zu liegen komme, so wird, weil AB = DE (V.), auch der Punkt B auf E fallen.

Da nun ferner AC = DF (V.), so muß der Endpunkt C von AC in irgend einen Punkt der Peripherie von L fallen.

Und weil BC = EF (V.), so muß der Endpunkt C von BC in irgend einen Punkt der Peripherie von K fallen.



Da also der Punkt C sowohl in die Peripherie, von L als auch in die von K fallen soll, so muß er in einen ihrer Durchschnittspunkte, also entweder in F oder in G fallen.

Denkt man sich nun das Dreieck ABC so an DE gelegt, daß es nach der nämlichen Seite zu fällt, wie das Dreieck DEF, so muß der Punkt C auf F fallen.

Beide Dreiecke sind daher congruent.

Anmerkung. Dieser Beweis setzt den Satz voraus, daß zwei Kreise sich in nicht mehr als zwei Punkten schneiden können, der erst später (§. 154) jedoch ganz unabhängig von vorliegendem Satze bewiesen wird.

§. 54.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehungsweise gleich sind, und es ist der Gegenwinkel der größern von diesen beiden Seiten im einen Dreieck so groß als im andern, so sind die Dreiecke congruent.

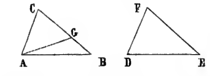
Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei AB = DE, AC = DF, und wenn AB und DE die größeren dieser Seiten sind, der Winkel ACB = DFE.

Bewiesen soll werden, daß die Dreiecke congruent sind.

Beweis.

Die Dreiecke wären congruent, wenn BC = EF wäre.

Es muß aber BC = EF sein; denn wäre z. B. BC > EF, so sei CG = EF; alsdann wäre in den beiden Dreiecken AGC und DEF die Seite AC = DF (V.), CG = FE, und Winkel C = F (V.). Beide Dreiecke wären also congruent, und deßwegen AG = DE. Da aber auch AB = DE (V.), so wäre mithin AG = AB, und folglich der Winkel AGB = Winkel ABG (§. 43). Nun ist aber Winkel AGB > Winkel ACG (§. 37), folglich wäre auch Winkel ABG > Winkel ACG, oder was dasselbe ist, Winkel ABC > Winkel ACB. Daraus würde aber folgen, daß AC > AB (§. 47), was der Voraussetzung widerspricht.



Es kann also nicht BC > EF sein.

Eben so beweist man auch, daß BC nicht kleiner sein könne als EF.

Es muß also BC = EF sein, woraus alsdann die Congruenz der Dreiecke folgt (§. 53).

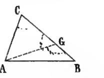
Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist ein specieller Fall von folgendem Allgemeineren:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten nebst dem Gegenwinkel einer dieser beiden Seiten in beiden Dreiecken beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke congruent, wenn der Gegenwinkel der andern gegebenen gleichen Seite in beiden Dreiecken zugleich ein spitzer, stumpfer oder rechter Winkel ist.

Ist z. B. AB = DE, AC = DF und Winkel B (der Gegenwinkel von AC) = Winkel E (dem Gegenwinkel von DF), so sind die Dreiecke ABC und DFE congruent, wenn die Winkel C und F (die Gegenwinkel von AB und DE) entweder 1) beide spitz oder 2) beide stumpf oder endlich 3) beide rechte Winkel sind.

Beweis. Man denke sich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Punkt E auf B und die Linie ED längs BA falle, so wird auch der Punkt D auf A fallen. Weil ferner W. E = W. B, so muß die Seite EF in die Richtung BC fallen. Fiele nun der Punkt F nicht auf C, sondern etwa in G so fiele auch das Dreieck DEF so, wie das Dreieck ABG liegt; DF wäre = AG, und W. F = W. AGB.

Da nun auch DF = AC (V.), so wäre auch AG = AC und daher W. AGC = W. C (§. 43). Da ferner W. AGC + W. AGB = zwei Rechten, so wäre auch W. C + W. AGB = zwei Rechten, mithin auch W. C + W. F = zwei Rechten, was unmöglich ist, im Falle C und F zugleich spitze oder stumpfe Winkel sind. Es kann also F im ersten und zweiten Falle nur auf C fallen, weil man bei jeder andern Annahme auf ähnliche Widersprüche kommen würde.



Im dritten Falle (wo C und F als rechte Winkel angenommen werden) käme man zwar, falls F auf G fiele, nicht auf einen ähnlichen Widerspruch, weil in diesem Falle wirklich W. C + W. F = zwei Rechten; aber aus §. 37 ist bekannt, daß wenn C ein Rechter ist, der Winkel AGB, d. i. W. F, nicht auch ein Rechter sein könne. Dieser neue Widerspruch hebt sich bloß dann, wenn der W F mit dem W. C ganz zusammen, d. h. wenn der Punkt F auf C fällt.

Uebrigens erhellt die Wahrheit des Lehrsatzes für den dritten Fall schon aus §. 41 (oder auch §. 42) in Verbindung mit §. 39. 5.

§. 54. a.

Zusatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent,

1) wenn die beiden Katheten im einen so groß sind als im andern (§. 41),
2) wenn eine Kathete nebst einem homologen schiefen Winkel (§. 42),
3) wenn die Hypothenuse und ein schiefer Winkel (§. 42),
4) wenn die Hypothenuse und eine Kathete in beiden Dreiecken beziehungsweise gleich sind (§. 54).

§. 55.

Lehrsatz.

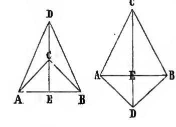
Wenn über einer und derselben begrenzten Geraden zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet sind (entweder auf derselben, oder auf entgegengesetzten Seiten), so steht die Gerade, welche die Spitzen dieser Dreiecke verbindet, auf der Mitte ihrer Grundlinie senkrecht und halbirt die Winkel an beiden Spitzen.

Voraussetzung. Ueber der Geraden. AB sind zwei gleichschenklige Dreiecke ACB und ADB errichtet.

Bewiesen soll werden, daß die Gerade DC, welche die Spitzen der Dreiecke verbindet 1) auf der Mitte von AB, 2) senkrecht auf AB steht, und 3) die Winkel ACB und ADB halbirt.

Beweis.

1) Die Dreiecke ADC und BDC sind congruent, weil ihre Seiten beziehungsweise gleich sind (§. 53); mithin ist Winkel ADC = W. BDC.



Nun ist in den beiden Dreiecken ADE und BDE die Seite AD = BD, ED = ED und Winkel ADE = W. BDE, mithin sind diese Dreiecke ebenfalls congruent (§. 41), und daher AE = BE, d. h. AB wird durch DE halbirt.

2) Aus der Congruenz der Dreiecke ADE und BDE folgt ferner, daß Winkel AED = W. BED; mithin steht DC auch senkrecht auf AB (§. 18).

3) Daß W. ADE = W. BDE, d. h. daß W. ADB halbirt sei, ist bereits bewiesen worden, und daß Winkel ACE = W. BCE, d. h. daß auch Winkel ACB halbirt sei, folgt aus der Congruenz der Dreiecke ACE und BCE.

* §. 55. a.

Zusätze.

1) Wenn man über einer geraden Linie mehrere gleichschenklige Dreiecke errichtet, so liegen ihre Spitzen alle in der auf der Mitte ihrer Grundlinie senkrecht errichteten Geraden.

2) Wenn man auf der Mitte einer begrenzten Geraden eine Senkrechte errichtet, so sind alle Punkte dieser letzteren gleichweit von den Endpunkten der Geraden entfernt.

3) Wenn man auf der Mitte einer begrenzten Geraden eine Senkrechte

errichtet, so ist jeder Punkt, der außerhalb dieser Senkrechten liegt, ungleichweit von den Endpunkten der begrenzten Geraden entfernt.

Geometrische Auflösung mehrerer auf die vorhergehenden §§ sich beziehenden Aufgaben.

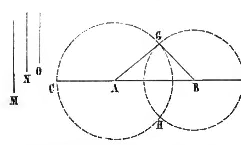
§. 56.

Aufgabe.

Aus drei gegebenen Geraden M N O soll ein Dreieck verzeichnet werden.

Auflösung. Man trage die drei gegebenen Geraden so in eine einzige CD zusammen, daß diejenige, welche die Grundlinie des Dreiecks werden soll, in die Mitte komme, hier z. B. M = AB;

AC sei = N, BD = O.



Nun beschreibe man aus A mit der Eröffnung AC einen Kreis; ebenso aus B mit der Eröffnung BD.

Beide Kreise werden sich in zwei Punkten G und H schneiden, und man erhält das verlangte Dreieck, wenn man entweder nach dem einen oder nach dem andern dieser Punkte (hier z. B. nach G) aus A und B gerade Linien zieht.

Beweis.

In dem Dreiecke AGB ist AB = M.

Da ferner AG = AC (§. 22), und AC = N (Constr.), so ist auch AG = N.

Und weil BG = BD (§. 22) und BD = O (Constr.), so ist auch BG = O.

Das Dreieck AGB besteht also aus den drei gegebenen Geraden M, N und O.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, wie diese Auflösung sich abkürzen läßt. — Soll die Auflösung möglich sein, so müssen je zwei der gegebenen Seiten immer größer sein als die dritte. S. auch die Anmerkung zum dritten Beweis von §. 53.

§. 57.

Zusatz.

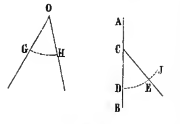
Aus der Auflösung der vorigen Aufgabe erhellt zugleich die Art, wie man ein gleichseitiges Dreieck zu verzeichnen hat, wenn eine Seite desselben gegeben ist; und ein gleichschenkliges Dreieck, wenn man eine der beiden gleichen Seiten, und die dritte Seite desselben kennt.

Auch erhellet leicht, wie man ein Dreieck verzeichnen könne, das einem gegebenen congruent ist.

§. 58.

Aufgabe.

An den Punkt C der gegebenen Geraden AB soll ein Winkel gezeichnet werden, der einem gegebenen Winkel O gleich ist.



Auflösung. Aus dem Punkt O beschreibe man mit beliebiger Eröffnung OG den Kreisbogen GH (von einem Schenkel des gegebenen Winkels zum andern); hierauf aus C mit der Eröffnung CD = OG ebenfalls einen Kreisbogen DJ. Nun nehme man die Weite GH und beschreibe mit derselben aus D einen Kreisbogen, der den Bogen DJ in E durchschneidet. Zieht man nun CE, so erhält man den Winkel DCE, der dem gegebenen GOH gleich sein wird.

Beweis.

In den beiden Dreiecken GOH und DCE ist CD = OG, CE = OH, und DE = GH (Constr.); folglich sind beide Dreiecke congruent, und daher Winkel DCE = Winkel GOH.

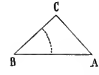
Anmerkung. Man kann an einem Punkte in einer Geraden einen Winkel nach vier verschiedenen Lagen anlegen.

§. 59.

Aufgabe.

Es soll ein Dreieck verzeichnet werden, wozu zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gegeben sind.





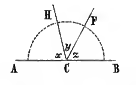
Auflösung. Es seien M und N die gegebenen Seiten und x der gegebene Winkel.

Man verzeichne einen Winkel ABC = x (§. 58), mache dessen einen Schenkel AB = M, den andern BC = N und ziehe AC, so erhält man das verlangte Dreieck.

§. 60.

Aufgabe.

Es sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben, man soll den dritten finden.



Auflösung. Es seien x und y die beiden gegebenen Winkel.

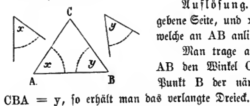
Man ziehe die Gerade AB und lege an einen beliebigen Punkt C derselben den Winkel ACH = x.

An dem nämlichen Punkt, aber an den Schenkel CH lege man den Winkel HCF = y, so wird FCB der gesuchte Winkel sein (§. 25. g. und §. 38).

§. 61.

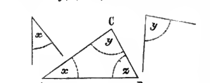
Aufgabe.

Es soll ein Dreieck verzeichnet werden, wozu eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.



Auflösung. 1) Es sei AB die gegebene Seite, und x und y die beiden Winkel, welche an AB anliegen sollen.

Man trage an den Punkt A der Linie AB den Winkel CAB = x, und an den Punkt B der nämlichen Linie den Winkel CBA = y, so erhält man das verlangte Dreieck.



2) Es sei AB die gegebene Seite, und x und y die beiden gegebenen Winkel, von denen der eine x an der Linie AB anliegen, der andere y aber der Gegenwinkel derselben sein solle.

Man suche zuerst zu dem Winkel x und y den dritten Winkel z des Dreiecks, nach §. 60. Hierauf trage man an den Punkt A der Linie AB den den Winkel CAB = x, und an den Punkt B derselben Linie den Winkel z, so erhält man das verlangte Dreieck.

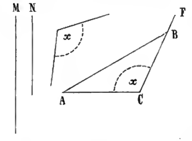
Anmerkung. Soll die Aufgabe möglich sein, so müssen die beiden gegebenen Winkel zusammen genommen kleiner sein als zwei Rechte.

§. 62.

Aufgabe.

Es soll ein Dreieck verzeichnet werden, wozu zwei Seiten und der Gegenwinkel einer derselben gegeben sind.

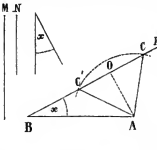
Auflösung. 1) Es seien M und N die beiden gegebenen Seiten, M sei die größere, und x ihr Gegenwinkel.



An den einen Endpunkt C der kleineren Seite N = AC trage man den Winkel x.

Hierauf beschreibe man aus dem andern Endpunkte A mit der Eröffnung M einen Kreisbogen, der den andern Schenkel CF des Winkels x in B schneide. Zieht man nun BA, so erhält man das verlangte Dreieck.

2) Sind zwei Seiten M, N und der Gegenwinkel x der kleineren Seite gegeben, so trage man an den Endpunkt B der größeren Seite M = AB den Winkel CBA = x, und beschreibe aus A mit der Eröffnung N einen Kreis, so wird solcher den Schenkel BF in zwei Punkten C und C′ schneiden, und es wird sowohl das Dreieck ABC als auch das Dreieck ABC′ der Aufgabe Genüge leisten. Die Aufgabe ist also unbestimmt, da sie zwei Auflösungen zuläßt. Diese Unbestimmtheit fällt jedoch weg, sobald bekannt ist, ob der Gegenwinkel der größeren Seite ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer sein solle.

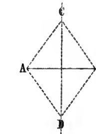


Ist nämlich die gegebene kleinere Seite N gleich dem Lothe AO, so findet bei der Beschreibung des Kreises kein doppelter Durchschnitt mit dem

Schenkel BF, sondern nur eine Berührung in dem Punkte O statt, und man erhält in diesem Falle nur ein Dreieck, nämlich das in O rechtwinklige AOB. Ist N hingegen größer als AO, so wird, falls der Gegenwinkel der größeren Seite ein stumpfer sein solle, das Dreieck ABC' — und im Falle jener Gegenwinkel ein spitzer sein solle, das Dreieck ABC der Aufgabe genügen. — Ist N $<$ AO, so ist die Aufgabe unmöglich.

§. 63.

Aufgabe.

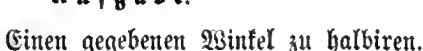


Eine gegebene Gerade AB von bestimmter Länge zu halbiren.

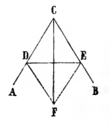
Auflösung. Man beschreibe auf beiden Seiten von AB die gleichseitigen (oder auch gleichschenkligen) Dreiecke ABC und ABD, und verbinde deren Spitzen C und D durch die gerade Linie CD, so wird AB durch letztere halbirt (§. 55).

§. 64.

Aufgabe.



Einen gegebenen Winkel zu halbiren.



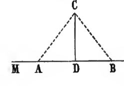
Auflösung. Es sei ACB der gegebene Winkel. Man schneide von den Schenkeln desselben aus der Spitze die gleichen Stücke CD und CE ab.

Hierauf ziehe man die Gerade DE und beschreibe über derselben ein gleichschenkliges Dreieck DFE. Zieht man nun die Linie CF, so halbirt diese den gegebenen Winkel (§. 55).

§. 65.

Aufgabe.

In dem Punkt D der gegebenen Geraden MN eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten.

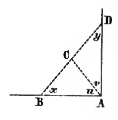


Auflösung. Man nehme DA willkürlich an und mache DB = DA. Hierauf beschreibe man über AB das gleichschenklige Dreieck ACB und ziehe DC, so wird diese die verlangte Senkrechte sein (§. 43. a. Nr. 1).

§. 66.

Aufgabe.

In dem Endpunkte A einer Geraden eine senkrechte Linie auf dieselbe zu errichten.



Auflösung. Man beschreibe über einem beliebigen Stück BA der Geraden ein gleichschenkliges Dreieck ABC; verlängere AC über C hinaus und mache die Verlängerung CD = BC. Zieht man nun DA, so wird diese die verlangte Senkrechte sein.

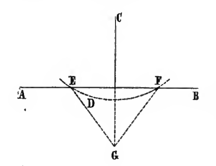
Beweis.

Weil x = u (§. 43),
und y = v,
so ist x + y = u + v,
d. h. x + y = W. ABD;
mithin ist W. ABD ein Rechter (§. 39, 4), und also DB senkrecht auf AB.

§. 67.

Aufgabe.

Man soll aus einem außerhalb der Geraden AB liegenden Punkte C ein Loth auf dieselbe fällen.



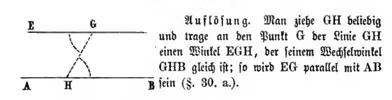
Auflösung. Man nehme auf der andern Seite von AB einen Punkt D willkürlich an und beschreibe mit der Eröffnung CD einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in 2 Punkten E und F schneidet.

Nun beschreibe man unter EF ein gleichschenkliges Dreieck EGF und verbinde dessen Spitze G mit C durch eine Gerade, so ist diese das gesuchte Loth (§. 55).

§. 68.

Aufgabe.

Durch einen Punkt G eine Gerade zu ziehen, die mit einer andern Geraden AB parallel ist.



Auflösung. Man ziehe GH beliebig und trage an den Punkt G der Linie GH einen Winkel EGH, der seinem Wechselwinkel GHB gleich ist; so wird EG parallel mit AB sein (§. 30. a.).

B. Das Viereck, besonders das Parallelogramm.

§. 69.

Erklärung.

Ein Viereck ist eine von vier geraden Linien begrenzte Ebene.

Jede Gerade, welche zwei gegenüberstehende Ecken eines Vierecks verbindet, heißt eine Diagonale desselben.

Zusatz.

In jedem Viereck sind drei Seiten zusammen genommen größer als die vierte (§. 50).

§. 70.

Lehrsatz.

Die vier innern Winkel eines Vierecks betragen zusammen vier Rechte.

C D A B q p y x

Voraussetzung. Es sei ABCD ein Viereck.

Bewiesen soll werden, daß seine vier inneren Winkel A, B, C und D zusammen genommen so groß sind als vier Rechte.

Beweis.

Man ziehe die Diagonale DB, so entstehen die beiden Dreiecke ADB und CDB.

In demselben ist $A + x + p = 2$ R und
$C + y + q = 2$ R (§. 38)
folglich $A + C + x + y + p + q = 4$ R. (Grundf. IV.)
d. i. $A + C + B + D = 4$ R.

§. 71.

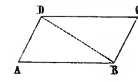
Erklärung.

Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

§. 72.

Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale halbirt.



Voraussetzung. ABCD ist ein Parallelogramm, d. h. AB ist parallel mit DC, und AD parallel mit BC.

Bewiesen soll werden, daß das Parallelogramm durch die Diagonale DB halbirt werde, d. h. daß das Dreieck ABD = BCD.

Beweis.

In den beiden Dreiecken ABD und BCD ist die Seite DB gemeinschaftlich, ferner der Winkel ABD = W. BDC und der W. ADB = W. DBC (§. 31. a); folglich sind beide Dreiecke congruent (§. 42), also gleich, und mithin ist das Parallelogramm ABCD durch DB halbirt.

§. 73.

Lehrsatz.

In einem Parallelogramm sind sowohl die Gegenseiten als auch die Gegenwinkel einander gleich.



Voraussetzung. In dem Viereck ABCD ist AB mit DC und AD mit BC parallel.

Bewiesen soll werden, daß AB = DC, AD = BC; ferner, daß Winkel ABC = W. ADC und W. DAB = W. DCB sei.

Beweis.

Da die beiden Dreiecke ABD und DBC congruent sind (§. 72), so ist AB = DC, und AD = BC.

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke folgt ferner auch die Gleichheit der beiden Winkel DAB und DCB;

und weil Winkel CDB = W. DBA,
und Winkel ADB = W. DBC,
so ist auch W. CDB + W. ADB = W. DBA + DBC (Grdf. IV).
d. i. W. ADC = W. ABC (Grdf. II.)

§. 74.

Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck die Gegenseiten gleich sind, so sind

sie auch parallel, d. h. das Viereck ist in diesem Falle ein Parallelogramm. (Vorige Figur.)

Voraussetzung. In dem Viereck ABCD sei AB = DC und AD = BC.

Bewiesen soll werden, daß AB auch parallel mit DC und ebenso AD parallel mit BC sei.

Beweis.

Man ziehe die Diagonale DB, so ist in den beiden Dreiecken ADB und BDE die Seite AB = DC, AD = BC (V.), und DB = DB; mithin sind dieselben congruent (§. 53) und folglich 1) Winkel ADB = W. DBC und 2) Winkel ABD = W. CDB.

Aus Nr. 1 folgt daß AD und BC, und aus Nr. 2, daß AB und DC parallel sind (§. 30. a).

* §. 74. a.

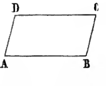
Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck die Gegenwinkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Voraussetzung. In dem Viereck ABCD ist W. A = W. C und W. B = W. D.

Bewiesen soll werden, daß AD mit BC und AB mit DC parallel ist.

Beweis.



Da W. A = C und W. B = D, so ist W. A + B = W. C + D = W. A + D = W. C + B; also jede dieser Winkelsummen = 2 R (§. 70).

Aus W. A + B = 2 R folgt aber, daß AD parallel mit BC, und aus W. A + D = 2 R, daß AB parallel mit DC ist (§. 30 b); mithin ist ABCD ein Parallelogramm.

§. 75.

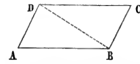
Lehrsatz.

Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten parallel und gleich sind, so sind es auch die beiden andern Gegenseiten.

Voraussetzung. In dem Viereck ABCD seien AB und DC parallel und gleich.

Bewiesen soll werden, daß auch AD und BC parallel und gleich sind.

Beweis.



Man ziehe die Diagonale DB, so ist in den beiden Dreiecken ADB und DBC die Seite AB = DC (V.), DB = BD, und Winkel CDB = W. ABD (§. 31. a), mithin sind die Dreiecke congruent und daher AD = BC. Aus der Gleichheit der Winkel ADB und DBC folgt aber auch, daß AD und BE parallel sind (§. 30. a). Das Viereck ABCD ist also ein Parallelogramm.

§. 76.

Zusätze und Erklärungen.

1) Wenn in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten gleich sind, so sind es alle vier.

2) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein schiefer ist, so sind es alle vier.

3) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle vier.

4) Ein Parallelogramm, dessen Seiten alle einander gleich sind, nennt man ein gleichseitiges, ein solches hingegen, in welchem nur die Gegenseiten gleich sind, ein ungleichseitiges Parallelogramm.

Schiefwinklig heißt ein Parallelogramm, wenn es lauter schiefe Winkel hat, rechtwinklig hingegen oder ein Rechteck (Oblongum), wenn es lauter rechte Winkel enthält.

5) Ein gleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm heißt ein Quadrat, ein gleichseitig schiefwinkliges hingegen ein Rhombus (Raute).

Ein ungleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm heißt Oblongum, Rechteck (im engern Sinne); ein ungleichseitig schiefwinkliges aber Rhomboid (längliche Raute).

Ein Viereck, in welchem nur zwei Seiten parallel, die beiden andern aber nicht parallel sind, heißt ein Trapez. Ein Viereck, das gar keine parallelen Seiten hat, heißt Trapezoid.

Ein Trapez, in welchem die nicht parallelen Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig.

6) Wenn man zwischen zwei parallelen Linien AB und CD mehrere senkrechte EF, GH, JK zieht, so sind diese einander gleich.

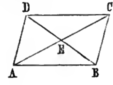
Denn die entstehenden Figuren sind Parallelogramme, in welchen sodann nach §. 73 die Gegenseiten gleich sind. Man nennt diese senk-

rechten Linien EF, GH und JK die Entfernungen der Parallelen AB und CD; in diesem Sinne sagt man: „Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt."

§. 77.

Lehrsatz.

Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.



Voraussetzung. ABDC ist ein Parallelogramm.

Bewiesen soll werden, daß seine beiden Diagonalen AD und BC sich halbiren, d. i. daß AE = EC, BE = ED.

Beweis.

Da in den beiden Dreiecken AEB und DEC die Seite AB = CD (§. 73), Winkel EAB = W. ECD, und W. ABE = W. EDC (§. 31. a), so sind dieselben congruent (§. 42), mithin AE = EC und BE = ED.

* §. 78.

Zusätze.

1) Wenn die Diagonalen eines Vierecks sich halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Dieses folgt aus der Congruenz der im Scheitel einander gegenüberliegenden Dreiecke.

2) Die Diagonalen der gleichseitigen Parallelogramme schneiden sich unter rechten Winkeln (§. 53 und §. 18). Und umgekehrt: wenn die Diagonalen eines Parallelogramms sich unter Rechten schneiden, so ist das Parallelogramm gleichseitig (§. 41 und §. 76. 1).

3) Die Diagonalen eines ungleichseitigen Parallelogramms schneiden sich unter schiefen Winkeln (§. 52) und umgekehrt: wenn die Diagonalen eines Parallelogramms sich unter schiefen Winkeln schneiden, so ist das Parallelogramm ungleichseitig (§. 51).

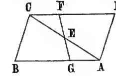
4) Im gleichseitigen Parallelogramm werden je zwei Gegenwinkel durch die ihre Spitzen verbindenden Diagonalen halbirt (§. 44). Der umgekehrte Satz ist ebenfalls richtig.

5) Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen von gleicher, im schiefwinkligen von ungleicher Größe und umgekehrt.

* §. 79.

Lehrsatz.

Jede Linie, welche durch die Mitte der Diagonale eines Parallelogramms gezogen wird, halbirt dasselbe.



Voraussetzung. ABCD ist ein Parallelogramm und E die Mitte seiner Diagonale AD.

Bewiesen soll werden, daß jede Gerade wie FG, welche durch diese Mitte geht, das Parallelogramm in zwei gleiche Theile AGFD und BGFC theilt.

Beweis.

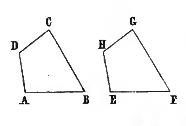
Da AE = EC (V.), Winkel EAG = W. ECF (§. 31. a) und W. AEG = W. CEF (§. 27), so sind die Dreiecke AEG und CEF congruent.

Da nun Dreieck ACD = ACB (§. 72)
und Dreieck CFE = AEG,
so ist ACD — CEF = ACB — AEG,
d. i. Viereck AEFD = Viereck BGEC (Grundſ. V.),
also auch AEFD + AEG = BGEC + CEF,
d. i. Viereck AGFD = BGFC.

§. 80.

Lehrsatz.

Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei zusammenstoßende Seiten und drei Winkel in beiden, nach derselben Ordnung genommen, einander gleich sind.



Voraussetzung. In den beiden Vierecken ABCD und EFGH sei z. B. AB = EF, BC = FG, ferner Winkel A gleich W. E, W. B gleich W. F und W. C gleich W. G.

Bewiesen soll werden, daß die Vierecke congruent sind.

Beweis.

Die vier Winkel eines Vierecks sind zusammen genommen so groß als vier Rechte. Da nun die drei Winkel A, B und C des einen Vierecks so groß sind als die drei Winkel E, F und G im andern, so muß auch der

vierte Winkel D des ersten Vierecks so groß sein als der vierte Winkel H im andern Viereck.

Legt man nun das Viereck ABCD so auf das Viereck EFGH, daß der Punkt A auf E und die Seite AB in die Richtung EF fällt, so wird auch der Punkt B auf F fallen, weil AB = EF (V.). Da nun W. B = W. F (V.), so fällt auch die Seite BC in die Richtung FG, und weil BC = FG (V.), so wird auch der Punkt C auf G fallen.

Weil ferner W. A = W. E, so fällt die Seite AD und mithin auch der Punkt D in die Richtung EH; und weil W. C = W. G, so fällt die Seite CD und mithin auch der Punkt D in die Richtung GH. Da also der Punkt D zugleich in die Richtungen EH und GH fallen soll, so muß er in ihren Durchschnittspunkt H fallen. Die Vierecke sind also congruent.

§. 80. a.

Zusätze.

Weitere Sätze von der Congruenz der Vierecke sind:

Zwei Vierecke sind congruent, wenn drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel in beiden Vierecken beziehungsweise gleich sind.

*Zwei Vierecke sind congruent, wenn alle vier Seiten und ein Winkel in beiden beziehungsweise gleich sind, und kein einspringender Winkel in keinem der Vierecke vorkommt.

*Zwei Vierecke sind congruent, wenn zwei nicht zusammenstoßende Seiten und drei Winkel in beiden beziehungsweise gleich sind (vorausgesetzt, daß die beiden andern Seiten nicht parallel seien, in welchem Falle die Congruenz zwar stattfinden kann, aber nicht nothwendig ist).

Die Auffindung der Beweise für diese Sätze bleibt dem Schüler zur Uebung überlassen.

§. 81.

Zusatz.

Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel in beiden gleich sind (§. 80), also namentlich zwei Rechtecke, wenn zwei zusammenstoßende Seiten beziehungsweise gleich sind; zwei Rauten, wenn eine Seite und ein Winkel, und endlich zwei Quadrate, wenn eine Seite im einen so groß als im andern ist.

§. 82.

Zusatz.

Zur Verzeichnung eines Parallelogramms überhaupt sind zwei zusammenstoßende Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel nöthig; zur Ver-

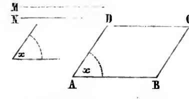
zeichnung eines Rechtecks also zwei zusammenstoßende Seiten; zur Verzeichnung eines Rhombus eine Seite und ein Winkel und zur Verzeichnung eines Quadrats eine Seite.

Anmerkung. Ein über der Seite A construirtes Quadrat pflegt man durch A^2 und ein aus den beiden Seiten A und B construirtes Rechteck durch $A \times B$ zu bezeichnen.

§. 83.

Aufgabe.

Aus zwei Seiten und einem Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen.



Auflösung. Sind M und N die gegebenen Seiten und x der gegebene Winkel, so verzeichne man zuerst einen Winkel BAD = x. Den einen Schenkel AB desselben mache man = M, den andern AD = N.

Nun beschreibe man aus D mit der Eröffnung AB, und aus B mit der Eröffnung AD Kreisbögen, und aus dem Punkt C, in welchem sich letztere schneiden, ziehe man CD und CB, so ist das Parallelogramm fertig.

Beweis.

Nach der Construction wird CD = AB und BC = AD, folglich muß ABCD ein Parallelogramm sein (§. 74).

§. 83. a.

Zusätze.

1) Aus dieser Auflösung erhellt sogleich, wie man einen Rhombus, ein Rechteck und ein Quadrat construiren muß, wenn die dazu nöthigen Stücke (§. 82) gegeben sind.

2) Man kann sich dieser Auflösung auch bedienen, um durch einen gegebenen Punkt D eine mit AB parallele Gerade zu ziehen. Man schneidet von der gegebenen Geraden ein Stück AB ab, zieht DA und beschreibt hierauf aus D mit AB und aus B mit AD Kreisbögen, welche durch ihren Durchschnitt in C einen zweiten Punkt für die gesuchte Parallele bestimmen.

C. Von den vielseitigen Figuren.

§. 84.

Erklärungen.

Jede geradlinige Figur von mehr als vier Seiten, heißt ein **Vieleck** (Polygon).

Nach der Anzahl seiner Seiten heißt ein Vieleck ein Fünfeck, Sechseck 2c. 2c.

Die Winkel, unter welchen die Seiten eines Vielecks zusammenstoßen, heißen **Vielecks- oder Polygonwinkel.** Die innern Winkel eines Vielecks sind entweder hohle und heißen alsdann **ausspringende**, weil ihre Spitzen nach außen gekehrt sind; oder erhabene, und heißen alsdann **einspringende** Winkel, weil ihre Spitzen einwärts stehen.

Zusatz.

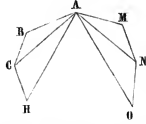
In einem Vieleck ist jede Seite kleiner als die Summe aller übrigen (§. 50. 1).

§. 85.

Lehrsatz.

Wenn man aus einer Winkelspitze eines Vielecks, das keine einspringende Winkel hat, Diagonalen nach allen übrigen Winkelspitzen zieht, so wird dadurch das Vieleck in zwei Dreiecke weniger getheilt, als es Seiten hat.

Beweis.



Ist HCBAMNO ein Stück von einem solchen Vieleck, und A die Winkelspitze, aus welcher nach den übrigen die Diagonalen AC, AH 2c. 2c. gezogen werden, so ist klar, daß die beiden äußersten Dreiecke ABC und AMN je **zwei** Seiten des Vielecks, die übrigen Dreiecke aber, welche zwischen diesen beiden liegen, je nur **eine** Seite desselben enthalten.

Jene beiden Dreiecke ABC und AMN enthalten zusammen also vier Seiten des Vielecks; daher ist die Anzahl der übrigen Dreiecke der um vier verminderten Seitenzahl des Vielecks gleich. Rechnet man nun jene beiden Dreiecke vollends **dazu**, so ist offenbar die Anzahl sämmtlicher Dreiecke der um **zwei** verminderten Seitenzahl des Vielecks gleich.

§. 86.

Lehrsatz.

Die Summe der innern Winkel eines Vielecks ist gleich dem Produkt aus zwei Rechten und der um zwei verminderten Seitenzahl des Vielecks; oder, was ganz dasselbe ist, so viel mal zwei Rechte als das Vieleck Seiten hat weniger vier Rechten.

Beweis.

Hat das Vieleck keine einspringenden Winkel und denkt man sich aus einer Winkelspitze desselben Diagonalen nach allen übrigen Winkelspitzen gezogen, so wird dasselbe in zwei Dreiecke weniger zerlegt als es Seiten hat (§. 85). Die Summe der Winkel aller dieser Dreiecke, oder was dasselbe ist, die Summe der Vieleckswinkel, ist gleich dem Produkt aus zwei Rechten in die um zwei verminderte Seitenzahl des Vielecks (§. 38). —

Oder denkt man sich aus irgend einem Punkt innerhalb des Vielecks gerade Linien nach den Ecken desselben gezogen, so wird es dadurch in so viele Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat. Die Summe der Winkel aller dieser Dreiecke beträgt so viel mal zwei Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Zieht man nun von dieser Summe die um den gemeinschaftlichen Punkt herumliegenden Winkel, welche vier Rechte betragen, ab, so bleibt die Summe der an den Ecken des Vielecks liegenden Winkel, d. i. die Summe der Vieleckswinkel übrig.

Hat das Vieleck einspringende Winkel, so lassen sich die beiden angeführten Beweise nicht anwenden; es ist aber sehr leicht nachzuweisen, daß die Summe der innern Winkel eines Vielecks immer um 2 R wächst, so oft demselben eine neue Ecke angesetzt wird. Da nun bekannt ist, daß die Summe der innern Winkel eines Dreiecks 2 R, so ist die eines Vierecks 4 R, die eines Fünfecks 6 R und überhaupt die eines nEcks $(n-2)\ 2\ R$, mag dasselbe einspringende Winkel haben oder nicht.

Anmerkung. Bezeichnet also n die Anzahl der Vielecksseiten, so ist die Summe der Vieleckswinkel $= (n-2)\ 2\ R$ oder $= n \times 2\ R - 4\ R = (2\ n - 4)\ R$.

* §. 86. a.

Lehrsatz.

Wenn man alle Seiten eines Vielecks, das keine einspringende Winkel hat, in einerlei Sinn verlängert, so ist die Summe der dadurch entstehenden Außenwinkel 4 R.

Beweis.

Die Summe aller äußern und innern Winkel beträgt n 2 R; da nun die Summe der innern Winkel um 4 R kleiner ist (§. 86), so bleibt für die Summe der äußeren Winkel 4 R übrig.

* §. 87.

Zusatz.

Sind in zwei n Ecken (n — 1) Winkel beziehungsweise einander gleich, so ist auch der nte Winkel des einen Vielecks dem nten Winkel des andern gleich.

§. 88.

Lehrsätze.

a) Zwei Vielecke von gleich vielen Seiten sind congruent, wenn alle Seiten bis auf eine, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel, beziehungsweise einander gleich sind, vorausgesetzt, daß die gleichen Stücke in beiden Vielecken in derselben Ordnung liegen.

b) Zwei Vielecke von gleich vielen Seiten sind congruent, wenn alle Seiten gleich sind, und auch alle Winkel bis auf drei als gleich bekannt sind, und in beiden Vielecken in derselben Ordnung auf einander folgen.

(Bei dem Beweis für diesen Satz ist zu unterscheiden, ob die drei unbekannten Winkel auf einander folgen oder zerstreut liegen.)

c) Zwei Vielecke von gleich vielen Seiten sind congruent, wenn alle Seiten bis auf zwei, und alle Winkel bis auf einen, beziehungsweise als gleich bekannt sind, und in derselben Ordnung liegen.

(Dieser letztere Satz läßt zwei Fälle zu: Die beiden nicht als gleich vorausgesetzten Seiten können entweder beisammen liegen oder nicht.)

Die Beweise für diese Sätze mag der Schüler selbst aufsuchen. Sie beruhen zum Theil auf dem sich von selbst verstehenden Satze, daß zwei nEcke einander congruent sind, wenn sie auf völlig gleiche Art aus congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

* §. 89.

Zwei Vielecke von n Seiten, also auch von n Winkeln, und überhaupt von 2 n Stücken, sind congruent, wenn 2 n — 3 ihrer gleichliegenden Stücke (Seiten und Winkel) gleich sind, und unter den drei fehlenden Stücken sich wenigstens ein Winkel befindet.

Hieraus folgt auch, wie viele und welcherlei Stücke zur Construktion eines Vielecks gegeben sein müssen.

§. 90.

Aufgabe.

Eine vielseitige Figur abzuzeichnen.

Auflösung. Man theile die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, zeichne diese Dreiecke ab nach §. 57 und setze sie in derselben Ordnung zusammen, wie sie in dem gegebenen Vieleck liegen. Oder man zeichne zuerst eine Seite der gegebenen Figur, dann einen anliegenden Winkel, hierauf den zweiten Schenkel dieses Winkels, alsdann den anliegenden zweiten Winkel rc. rc. (§. 88).

Anhang zum zweiten Abschnitt.

Einige Sätze über gewisse Linien im Dreieck.

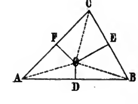
Erklärung.

Im Dreieck heißt jede aus einer Ecke durch die gegenüberliegende Seite gezogene Gerade, eine Transversale. Steht eine solche Transversale senkrecht auf der Seite, durch welche sie geht, so heißt sie das Höhenperpendikel dieser Seite.

Lehrsatz 1.

Die Halbirungsperpendikel der drei Dreiecksseiten schneiden sich im nämlichen Punkte.

Beweis.



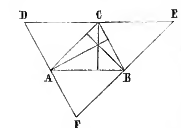
Errichtet man nämlich in den Mitten D und E der Dreiecksseiten AB und BC die Senkrechten DO und EO und zieht AO, BO und CO, so ist AO = BO und BO = CO (§. 55, a, 2), und mithin auch AO = CO. Errichtet man also in der Mitte F von AC eine Senkrechte auf AC, so muß diese durch O gehen (§. 43, a, 4). — Der Punkt O ist von A, B und C gleich weit entfernt.

Lehrsatz 2.

Die senkrechten Transversalen oder Höhenperpendikel eines Dreiecks schneiden sich im nämlichen Punkt.

Beweis.

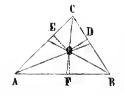
Zieht man durch A, B und C mit den Dreiecksseiten die Parallelen DF, FE und ED, so entsteht dadurch ein Dreieck DFE, das in vier congruente Dreiecke zerlegt ist (§. 73 und §. 53) und es ist FB = BE, FA = AD und CE = DC. Wenn also die aus den Mitten A, B und C der Dreiecksseiten DF, FE und ED errichteten Senkrechten sich in einem Punkte schneiden (voriger Lehrsatz), so gilt dieß auch von den Senkrechten, die man im Dreieck ABC aus A, B und C auf die Gegenseiten errichtet hat; denn diese Senkrechten fallen mit jenen zusammen.



Lehrsatz 3.

Die winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich im nämlichen Punkte.

Beweis.



Durch AO und BO werden die Winkel A und B des Dreiecks ABC halbirt. Fällt man nun aus O die Senkrechten OF, OD und OE auf AB, CD und AC, so sind die Dreiecke BFO und BDO, AFO und AEO congruent (§. 54, a; 3), und mithin OF = OD = OE. Zieht man nun CO, so sind die Dreiecke CEO und CDO ebenfalls congruent (§. 54, a; 4), und daher W. ECO = W. DCO, d. h. Winkel C ebenfalls halbirt. — Der Punkt O ist von den drei Dreiecksseiten gleichweit entfernt (§. 48, 2. Anmerk.).

Zusätze.

1) Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O in Lehrsatz 1 kann innerhalb, im Umfange und außerhalb des Dreiecks liegen. Auffindung dieser drei Fälle.

2) Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt O in Lehrsatz 2 kann innerhalb, in einer Ecke, oder außerhalb des Dreiecks liegen.

3) Wenn man eine der Seiten eines Dreiecks über beide Endpunkte hinaus verlängert und nicht nur die beiden so entstandenen Außenwinkel, sondern auch den Gegenwinkel der verlängerten Seite halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien in demselben Punkte. Der Beweis ist dem von Lehrsatz 3 ganz ähnlich. Auch in diesem Falle ist der Durchschnittspunkt gleichweit von den Seiten des Dreiecks entfernt.

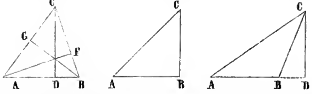
Dritter Abschnitt.

Vergleichung der Flächen geradliniger Figuren.

§. 91.

Erklärung.

Wenn man in einem Dreieck aus einer Winkelspitze ein Loth auf die Gegenseite fällt, so heißt solches das Höhenperpendikel dieser Seite. So ist z. B. CD das Höhenperpendikel von AB; BG das Höhenperpendikel von AC u. s. w. Nimmt man AB als Grundlinie des Dreiecks an, so ist das Höhenperpendikel CD die Höhe desselben. Für AC als Grundlinie wäre BG, und für BC als Grundlinie wäre AF die Höhe. — Ist einer der beiden



Winkel an der Grundlinie ein Rechter, so fällt die Höhe mit einem Schenkel dieses Rechten zusammen; ist aber einer der beiden Winkel an der Grundlinie ein stumpfer, so fällt die Höhe auf die Verlängerung der Grundlinie, also außerhalb des Dreiecks.

§. 92.

Erklärung.

In einem Parallelogramm nennt man den senkrechten Abstand zweier Gegenseiten die Höhe des Parallelogramms, und die beiden Parallelseiten selbst, auf welchen die Höhe senkrecht steht, die Grundlinien desselben.

§. 93.

Zusätze.

a) Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Spitze haben, und deren Grundlinien in einer und derselben Geraden liegen, haben gleiche Höhe.

b) Dreiecke, deren Spitzen sich in einer Geraden befinden, und deren Grundlinien alle in einer mit dieser Geraden parallelen Linie liegen, haben gleiche Höhe (§. 76. 6).



c) Parallelogramme, die zwischen denselben Parallelen liegen (so nämlich, daß ihre einen Grundlinien in der ersten und ihre andern Grundlinien in der zweiten Parallele liegen), haben gleiche Höhe.

d) Dreiecke oder Parallelogramme, welche auf derselben geraden Linie nach einerlei Seite zu stehen und gleiche Höhe haben, liegen zwischen denselben Parallelen.

§. 94.

Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme auf derselben oder auf gleicher Grundlinie stehen und zwischen denselben Parallelen liegen, so sind ihre Flächen gleich groß.

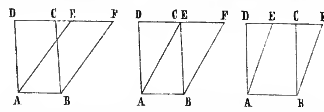
I. Wenn sie auf derselben Grundlinie stehen.

Voraussetzung. Die beiden Parallelogramme ABCD und ABFE haben einerlei Grundlinie AB und liegen zwischen den Parallelen AB und EF.

Bewiesen soll werden, daß ihre Flächen gleich sind.

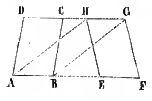
Beweis.

In den beiden Dreiecken DAE und CBF ist AD = BC, AE = BF (§. 73), und der Winkel DAE = CBF (§. 33); mithin sind beide Dreiecke



congruent (§. 41). Zieht man nun von der ganzen Figur DABF das einemal △ DAE, das anderemal △ CBF, also beidemale Gleiches ab, so bleibt Gleiches, nämlich: ABFE = ABCD.

II. Wenn die Parallelogramme nicht auf einerlei, aber auf gleicher Grundlinie stehen.



Voraussetzung. Die Parallelogramme ABCD und EFGH haben gleiche Grundlinien AB und EF und liegen zwischen den Parallelen AF und CH.

Bewiesen soll werden, daß sie an Flächeninhalt gleich sind.

Beweis.

Man ziehe AH und BG.

Da nun AB = EF (V.)
und EF = GH (§. 73),
so ist AB = GH.

Da aber AB auch parallel ist mit GH, so ist ABGH ein Parallelogramm (§. 75).

Nun ist ABCD = ABGH nach I. dieses Satzes,
und ABGH = EFGH eben deßhalb;
folglich auch ABCD = EFGH.

§. 94. a.

Zusatz.

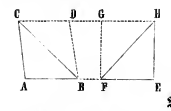
Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind an Flächeninhalt einander gleich.

Denn denkt man sich dieselben mit ihren Grundlinien auf eine und dieselbe gerade Linie gestellt, so liegen sie nach §. 93. d. zwischen denselben Parallelen, und sind also nach §. 94 an Fläche einander gleich.

§. 95.

Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.



Voraussetzung. Die Dreiecke ABC und EFH haben gleiche Grundlinien AB und EF, und gleiche Höhe.

Bewiesen soll werden, daß ihre Flächen gleich sind.

Beweis.

Man stelle beide Dreiecke mit ihren Grundlinien auf eine und dieselbe Gerade AE, so werden ihre Spitzen C und H in eine mit AF parallele Gerade CH zu liegen kommen (§. 93, d). Nun ziehe man durch B mit AC und durch F mit EH die Parallelen BD und FG, so erhält man die Parallelogramme ABDC und EFGH, welche einander gleich sind (§. 94. II.). Aus der Gleichheit dieser Parallelogramme aber folgt auch die Gleichheit ihrer Hälften, nämlich der Dreiecke ABC und EFH.

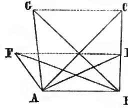
§. 96.

Zusätze.

1) Theilt man eine Seite eines Dreiecks in mehrere gleiche Theile und zieht aus der Spitze des Gegenwinkels nach den Theilpunkten gerade Linien, so wird dadurch das ganze Dreieck selbst in ebenso viele gleiche Theile getheilt (§. 93. a. und §. 95).

2) Aus Nr. 1 folgt unmittelbar, daß ein Dreieck die Hälfte, ein Drittheil, ein Vierttheil ꝛc. ꝛc. von einem andern Dreieck ist, wenn es mit letzterem gleiche Höhe aber eine $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ꝛc. ꝛc. so große Grundlinie hat.

3) Ein Dreieck ist die Hälfte, ein Drittheil, ein Viertheil ꝛc. ꝛc. von einem andern Dreieck, wenn es mit letzterem gleiche Grundlinie, aber eine $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ꝛc. ꝛc. so große Höhe hat.

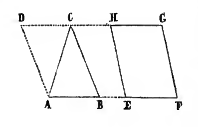


In dem rechtwinkligen Dreieck ABC sei AB die Grundlinie, mithin BC die Höhe. Nimmt man D in der Mitte von BC und zieht AD, so hat das Dreieck ABD dieselbe Grundlinie, wie ABC, aber eine halb so große Höhe. Nach Nr. 1 aber ist ABD halb so groß als ABC. Nun ist jedes andere Dreieck ABG von der Grundlinie AB und Höhe BC dem Dreieck ABC gleich (§. 95); und eben so ist jedes andere Dreieck ABF von der Grundlinie AB und Höhe BD dem Dreieck ABD gleich. Mithin ist jedes Dreieck, welches AB zur Grundlinie, BD zur Höhe hat, die Hälfte von einem Dreieck, das dieselbe Grundlinie und eine doppelt so große Höhe hat u. s. w.

§. 97.

Lehrsatz.

Ein Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, wenn es mit demselben gleiche Höhe hat.



Voraussetzung. Das Dreieck ABC hat mit dem Parallelogramm EFGH gleiche Grundlinie AB = EF und gleiche Höhe (weil es mit demselben zwischen den Parallelen AF und CG liegt).

Bewiesen soll werden, daß das Dreieck ABC halb so groß ist, als das Parallelogramm EFGH.

Beweis.

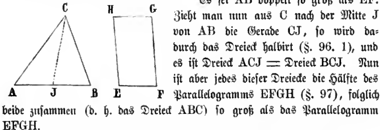
Durch A ziehe man mit BC die Parallele AD, so entsteht das Parallelogramm ABCD. Dieses ist dem Parallelogramm EFGH gleich (§. 94. II.).

Da nun das Dreieck ABC die Hälfte von dem Parallelogramm ABCD ist, so muß es auch die Hälfte vom Parallelogramm EFGH sein.

§. 98.

Zusatz.

1) Hat ein Dreieck gleiche Höhe mit einem Parallelogramm, aber eine doppelt so große Grundlinie, so ist es dem Parallelogramm an Fläche gleich.



Es sei AB doppelt so groß als EF. Zieht man nun aus C nach der Mitte J von AB die Gerade CJ, so wird dadurch das Dreieck halbirt (§. 96. 1), und es ist Dreieck ACJ = Dreieck BCJ. Nun ist aber jedes dieser Dreiecke die Hälfte des Parallelogramms EFGH (§. 97), folglich beide zusammen (d. h. das Dreieck ABC) so groß als das Parallelogramm EFGH.

2) Hat ein Dreieck gleiche Grundlinie mit einem Parallelogramm, aber eine doppelt so große Höhe, so ist es dem Parallelogramm gleich. Dieses folgt aus §. 97 in Verbindung mit §. 96. Nr. 3.

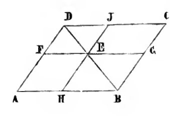
* §. 98. a.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt der Diagonale Parallelen mit den Seiten des Parallelogramms zieht, so wird dasselbe

1) in vier Parallelogramme getheilt, von welchen

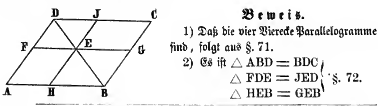
2) diejenigen einander gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht.



Voraussetzung. ABCD ist ein Parallelogramm. Man hat durch den Punkt E seiner Diagonale DB die Linien HJ und FG parallel mit den Seiten BC und AB gezogen.

Bewiesen soll werden, 1) daß die vier Vierecke AFEH, HEGB, EJCG und FEJD Parallelogramme sind;

2) daß die Parallelogramme AFHE und EJGD, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich sind.



Beweis.

1) Daß die vier Vierecke Parallelogramme sind, folgt aus §. 71.

2) Es ist $\triangle$ ABD = BDC
$\triangle$ FDE = JED §. 72.
$\triangle$ HEB = GEB

also $\triangle$ ABD — (FDB + HEB) = $\triangle$ BDC — (JDE + GEB);
d. i. Parallelogramm AFBE = P. EJCG.

§. 99.

Lehrsatz.

Zu einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse so groß, als die Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Voraussetzung. ABC sei ein in C rechtwinkliges Dreieck.

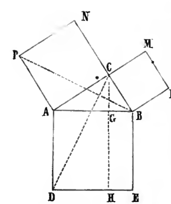
Bewiesen soll werden, daß das Quadrat über der Hypotenuse AB so groß ist, als die beiden Quadrate über den Katheten AC und BC zusammen genommen.

Beweis.

Man verzeichne über AB das Quadrat ABED, und ebenso über AC und BC die Quadrate ACNP und BCMF (indem man AC und BC über C hinaus verlängert, CN = AC und CM = BC macht 2c. 2c.).

Hierauf fälle man aus der Spitze C des rechten Winkels das Loth CG auf die Hypotenuse AB und verlängere es bis H, so wird dasselbe auch auf DE senkrecht sein (§. 32. c) und also das Quadrat ABED in zwei Rechtecke AGHD und BGHE theilen (§. 32. 2, §. 76. 3).

Endlich ziehe man noch CD und PB. Nun ist in den beiden Dreiecken CAD und PAB die Seite CA = PA (als Seiten eines Quadrats) und AD = AB (ebendeßwegen); ferner ist der Winkel CAD = Winkel PAB (weil jeder aus einem Rechten und dem Winkel CAB besteht), mithin sind die Dreiecke CAD und PAB congruent (§. 41).



Nun hat aber das Dreieck CAD mit dem Rechteck AGHD einerlei Grundlinie AD und liegt mit demselben zwischen den Parallelen AD und CH, folglich ist es die Hälfte von demselben (§. 97). Eben so hat das Dreieck PAB einerlei Grundlinie PA mit dem Quadrat ACNP und liegt mit demselben zwischen den Parallelen PA und NB; also ist es die Hälfte von dem Quadrate ACNP. Das Rechteck AGHD und das Quadrat ACNP müssen also gleich sein, weil ihre Hälften gleich sind.

Eben so beweist man auch, daß das Rechteck BGHE dem Quadrate BCMF gleich ist.

Daraus aber folgt, daß das Quadrat ABED (d. i. die Summe der beiden Rechtecke AGHD und BGHE) so groß ist als die beiden Quadrate ACNP und BCMF zusammen genommen.

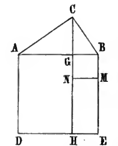
Anmerkung. Dieser Lehrsatz hat von seinem Erfinder, dem griechischen Philosophen Pythagoras, der 500 v. Chr. lebte, den Namen des pythagoräischen.

§. 100.

Zusätze.

1) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Kathete so groß als das Quadrat der Hypotenuse weniger dem Quadrat der andern Kathete.

2) Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so wird diese dadurch in zwei Abschnitte getheilt, und es ist alsdann das Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und einem der beiden Abschnitte so groß als das Quadrat der Kathete, die an dem Abschnitte anliegt, nämlich Rechteck $AB \times AG = AC^2$, und Rechteck $AB \times BG = BC^2$. Ist bereits bewiesen im Beweise zu §. 99.



3) Das Quadrat des Lothes selbst ist so groß als das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

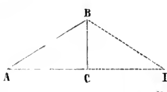
Man mache $BM = BG$ und ziehe MN parallel mit AB, so wird MNHE das Rechteck aus AG und GB sein (denn $NM = GB$; und da $BM = BG$ und $BE = BA$, so ist auch $ME = AG$).

Nun ist in dem bei G rechtwinkligen Dreiecke CGB $CG^2 = CB^2 - GB^2$ (Nr. 1), und weil $CB^2 =$ R. BEHG, so ist $CG^2 = BEHG - GB^2 = NMEH =$ R. AG $\times$ GB.

* §. 101.

Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite so groß ist, als die Quadrate über den beiden andern Seiten zusammen genommen, so ist der Gegenwinkel der ersteren Seite ein Rechter.



Voraussetzung. In dem Dreieck ACB sei $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Bewiesen soll werden, daß der Gegenwinkel von AB, nämlich der Winkel ACB ein Rechter ist.

Beweis.

In dem Punkt C der Linie CB errichte man das Loth CD = AC und ziehe BD, so ist in dem Dreieck BCD

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 \text{ (§. 99)};$$

weil ferner $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (V.),

so ist $AB^2 = BD^2$.

(Weil nämlich CD = AC (Constr.), so ist auch $CD^2 = AC^2$ und deßhalb die Ausdrücke $CD^2 + BC^2$ und $AC^2 + BC^2$ einander gleich, mithin auch $AB^2 = BD^2$). Daraus aber folgt, daß AB = BD (§. 81. b). Da also in den beiden Dreiecken ACB und BCD die Seite AC = CD (Constr.), CB = CB, und AB = BD, so sind dieselben congruent (§. 53) und mithin Winkel ACB = Winkel BCD. Da nun Winkel BCD = 1 R (Constr.), so muß auch Winkel ACB = 1 R sein.

.* §. 102.

Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie aus zwei Theilen besteht, so ist ihr Quadrat so groß als die Quadrate über den beiden Theilen nebst dem doppelten Rechteck aus diesen beiden Theilen.

Voraussetzung. Die Gerade AC besteht aus den beiden Theilen AB und BC.

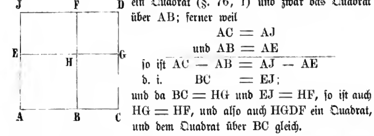
Bewiesen soll werden, daß

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,(AB \times BC).$$

Beweis.

Man zeichne über AC das Quadrat AJDC, mache AE = AB und ziehe die Geraden EG und BF mit den Seiten des Quadrats parallel.

Durch diese beiden Geraden, welche sich in H schneiden, wird das Quadrat AJDC in vier Parallelogramme (§. 71) und zwar in vier Rechtecke (§. 76, 3) getheilt.



Da aber AB = AE (Constr.), so ist ABHE ein Quadrat (§. 76, 1) und zwar das Quadrat über AB; ferner weil

$$AC = AJ$$
$$\text{und } AB = AE$$
$$\text{so ist } AC - AB = AJ - AE$$
$$\text{d. i. } BC = EJ;$$

und da BC = HG und EJ = HF, so ist auch HG = HF, und also auch HGDF ein Quadrat, und dem Quadrat über BC gleich.

Da ferner BH = EH, und HG = HF, so sind die beiden Rechtecke BCGH und EHFJ congruent (§. 81. b), und weil BCGH = Rechteck AB $\times$ BC, so ist auch EHFJ = Rechteck AB $\times$ BC.

Das Quadrat ACDJ besteht also aus dem Quadrat von AB (ABHE), aus dem Quadrat von BC (HGFD) und dem doppelten Rechteck aus AB und BC (BCGH und EHFJ) oder

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,(AB \times BC).$$

* §. 103.

Zusatz.

Ist AB = BC, so sind die vier Rechtecke sämmtlich Quadrate.

Besteht also eine Gerade aus zwei gleichen Theilen, so ist ihr Quadrat gleich dem vierfachen Quadrat ihrer Hälfte.

Oder: das Quadrat einer Geraden ist der vierte Theil von dem Quadrat einer doppelt so großen Geraden.

* §. 104.

Lehrsatz.

Wenn eine Gerade der Unterschied zweier anderer Geraden ist, so ist das Quadrat der ersten Geraden so groß, als die Quadrate der beiden andern Geraden weniger dem doppelten Rechteck aus eben diesen Geraden.

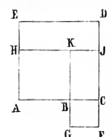
Voraussetzung. Es ist AB der Unterschied zwischen AC und BC.

Bewiesen soll werden, daß

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,(AC \times BC).$$

Beweis.

Man errichte auf AC das Quadrat ACDE, verlängere CD um CF = BC, ziehe FG parallel BC, BG parallel CF, so ist BCFG das Quadrat über BC (§. 71. 76, 1 und 3). Macht man ferner AH = AB, zieht HJ parallel AC und verlängert GB bis K, so ist ABKH das Quadrat über dem Unterschied AB, auch sind HJDE und GFJK Rechtecke, wie aus ihrer Entstehung ersichtlich ist. Da AH = AB, und AE = AC, so ist EH = BC (Grdſ. V), auch ist ED = AC, (§. 73); in dem Rechteck HJDE sind also zwei an einander stoßende Seiten gleich AC und BC; dasselbe läßt sich von dem Rechtecke GFJK zeigen.



Nun besteht die ganze Figur nach der Construction aus AC^2 und BC^2; sie besteht aber auch aus AB^2 und den Rechtecken HJDE und GFJK oder dem doppelten Rechteck aus AC und BC, woraus folgt:

$$AB^2 + 2\,(AC \times BC) = AC^2 + BC^2.$$

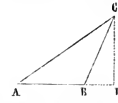
Nimmt man von der ganzen Figur AEDFB die Rechtecke HJDE und GFJK oder 2 (AC × BC) weg, so bleibt

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,(AB \times BC).$$

* §. 105.

Lehrsatz.

In einem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Gegenseite des stumpfen Winkels größer als die Quadrate der beiden andern Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck aus einem Schenkel des stumpfen Winkels und dessen Verlängerung bis zum Fußpunkt seines Höhenperpendikels.



Voraussetzung. Es sei ABC ein in B stumpfwinkliges Dreieck. Man hat aus der Spitze C das Loth CD auf die Verlängerung von AB gefällt.

Bewiesen soll werden, daß $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,(AB \times BD)$.

Beweis.

Es ist 1) $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (§. 99)

und $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,(AB \times BD)$ (§. 102).

Ferner ist $DC^2 = BC^2 - BD^2$ (§. 100. 1)

also 2) $AD^2 + DC^2 = AB^2 + BC^2 + BD^2 - BD^2 + 2\,(AB \times BD)$

$= AB^2 + BC^2 + 2\,(AB \times BD)$

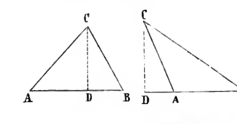
Aus (1) und (2) aber ergibt sich sodann weiter

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\ (AB \times BD).$$

* §. 106.

Lehrsatz.

In einem jeden Dreieck ist das Quadrat der Gegenseite eines spitzen Winkels kleiner als die Quadrate der beiden andern Seiten des Dreiecks und zwar um das doppelte Rechteck aus einem Schenkel des spitzen Winkels und demjenigen Abschnitt desselben, der zwischen dem Scheitel des Winkels und dem Fußpunkt des Höhenperpendikels liegt.



Voraussetzung. In dem Dreieck ABC sei B ein spitzer Winkel und CD ein aus C auf AB gefälltes Loth.

Bewiesen soll werden, daß $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ (AB \times BD)$.

Beweis.

In dem bei D rechtwinkligen Dreiecke ADC ist

1) $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (§. 99); ferner ist
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\ (AB \times BD)$ (§. 104)
und $DC^2 = BC^2 - BD^2$ (§. 100), also auch

2) $AD^2 + DC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ (AB \times BD)$.

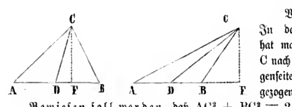
Aus (1) und (2) folgt aber

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ (AB \times BD).$$

* §. 107.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck aus der Spitze eines Winkels nach der Mitte der Gegenseite eine Linie zieht, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten des Dreiecks gleich dem doppelten Quadrat über der einen Hälfte jener Gegenseite nebst dem doppelten Quadrat über der Theilungslinie.



Voraussetzung. In dem Dreieck ACB hat man aus der Spitze C nach der Mitte der Gegenseite AB die Linie CD gezogen.

Bewiesen soll werden, daß $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2DC^2$.

Beweis.

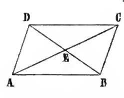
Man fälle aus C auf die Seite AB oder ihre Verlängerung das Loth CF, so ist in dem bei D stumpfwinkligen Dreieck ADC:

1) $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2 (AD \times DF)$, (§. 105),
   und in dem bei D spitzwinkligen Dreieck BCD:
   $BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 (BD \times DF)$, (§. 106), oder weil
   $BD = AD$ (Constr.).
2) $BC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 (AD \times DF)$; addirt man nun (1) und (2)

so erhält man $AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2DC^2$.

* §. 108.

Lehrsatz.



In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten so groß, als die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen.

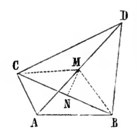
Voraussetzung. ABCD ist ein Parallelogramm.

Bewiesen soll werden, daß $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$.

Beweis.

In dem Dreieck ABD ist BE = ED (§. 77), also ist
$AB^2 + AD^2 = 2 (AE^2) + 2 (BE^2)$; und im Dreieck BCD ist
$CD^2 + BC^2 = 2 (EC^2) + 2 (BE^2) = 2 (AE^2) + 2 (BE^2)$ (§. 107)
also: $AB^2 + AD^2 + CD^2 + BC^2 = 4 (AE^2) + 4 (BE^2)$
$= AC^2 + BD^2$ (§. 103).

Anmerkung. Dieser Satz ist ein besonderer Fall von folgendem allgemeineren:



In einem Viereck ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten so groß, als die Summe der Quadrate über den Diagonalen sammt dem vierfachen Quadrat über derjenigen Geraden, welche die Mitten beider Diagonalen verbindet.

Beweis.

In dem Viereck ABDC sei M die Mitte der Diagonale AD und N die Mitte der Diagonale CB; man ziehe MN, CM und MB. Nun ist im Dreieck ACD:

$AC^2 + CD^2 = 2\,CM^2 + 2\,DM^2$, und im Dreieck ABD:
$AB^2 + BD^2 = 2\,BM^2 + 2\,DM^2$ (§. 107)

also: 1) $AB^2 + BD^2 + CD^2 + AC^2 = 2\,CM^2 + 2\,BM^2 + 4\,DM^2$.

Ferner im Dreieck CMB:
$CM^2 + BM^2 = 2\,MN^2 + 2\,BN^2$

und 2) $2\,CM^2 + 2\,BM^2 = 4\,MN^2 + 4\,BN^2$.

Aus (1) und (2) folgt:

$$AB^2 + BD^2 + CD^2 + AC^2 = 4\,DM^2 + 4\,BN^2 + 4\,MN^2$$
$$= AD^2 + BC^2 + 4\,MN^2 \text{ (§. 103).}$$

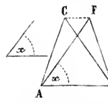
Im Parallelogramm, wo beide Diagonalen sich halbiren, verschwindet MN.

Aufgaben, welche sich auf die vorhergehenden §§. 91—108 beziehen.

§. 109.

Aufgabe.

Ein beliebiges Dreieck in ein anderes von gleicher Grundlinie und Höhe, aber mit einem vorgeschriebenen Winkel an der Grundlinie, zu verwandeln.



Auflösung. Es sei ABC das Dreieck, welches in ein anderes von gleicher Grundlinie und Höhe, aber mit dem Winkel x an der Grundlinie verwandelt werden soll. Man ziehe durch die Spitze C eine Parallele mit der Grundlinie AB. Hierauf trage man den Winkel FAB = x an den Punkt A der Linie AB und verlängere den andern Schenkel, bis er die Parallele durch C in F schneidet; zieht man nun FB, so erhält man das verlangte Dreieck.

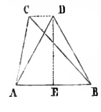
1) Anmerkung. Um das Dreieck ABC in ein rechtwinkliges von gleicher Grundlinie und Höhe zu verwandeln, errichte man in B eine Senkrechte BF und ziehe AF, so ist ABF das verlangte Dreieck.

2) Anmerkung. Um ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes von gleicher Grundlinie und Höhe, aber mit einem vorgeschriebenen Winkel zu verwandeln, wendet man ein ähnliches Verfahren an.

§. 110.

Aufgabe.

Ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges von derselben Grundlinie und Höhe zu verwandeln.

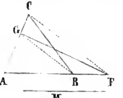


Auflösung. Es sei ABC das gegebene Dreieck. Man ziehe wieder durch seine Spitze C eine Parallele mit der Grundlinie AB. Hierauf halbire man AB in E und errichte das Loth ED. Aus dem Punkt D, wo das Loth die Parallele schneidet, ziehe man DA und DB, so ist ADB das verlangte gleichschenklige Dreieck; denn es ist AD = DB (§. 48. 4. oder §. 55. a. 2).

§. 111.

Aufgabe.

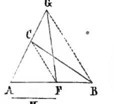
Ein gegebenes Dreieck in ein anderes von einer der Größe nach vorgeschriebenen Grundlinie zu verwandeln.



Auflösung. Es sei ABC das gegebene Dreieck und M die Grundlinie des gesuchten Dreiecks, welche

1) größer sei als die Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks.

Man verlängere AB bis AF = M; ziehe hierauf FC und mit dieser BG parallel. Zieht man nun GF, so erhält man das verlangte Dreieck AGF. Denn da die Dreiecke GBF und BGC gleich sind, (§. 95), so ist auch GBF + ABG = BGC + ABG, d. i. Dreieck AGF = Dreieck ABC.



2) M sei kleiner als die Grundlinie des gegebenen Dreiecks.

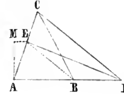
Man mache AF = M, ziehe CF, und mit dieser BG parallel, welche die verlängerte AC in G schneidet. Zieht man nun GF, so ist AGF das verlangte Dreieck.

Wird wie vorhin bewiesen.

§. 112.

Aufgabe.

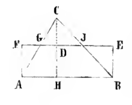
Ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Höhe zu verwandeln.



Auflösung. Es sei ABC das gegebene Dreieck und AM die Höhe des gesuchten Dreiecks, welche

1) größer sei als die Höhe des gegebenen.

Man lege die gegebene Höhe AM unter einem rechten Winkel an den Punkt A der Linie AB, ziehe durch M eine Parallele mit AB, und verlängere AC bis zum Durchschnitt E mit der Parallelen. Nun ziehe man EB und mit dieser die Parallele CD, so wird, wenn man noch ED zieht, AED das gesuchte Dreieck sein. — Beweis wie oben.



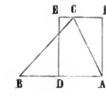
2) Die vorgeschriebene Höhe sei kleiner als die des gegebenen Dreiecks.

Man ziehe ME parallel AB, hierauf EB und mit dieser die Parallele CD, welche die verlängerte AB in D schneidet. Zieht man nun noch ED, so erhält man das verlangte Dreieck AED. Beweis wie oben.

§. 113.

Aufgabe.

Ein Dreieck in ein Rechteck von derselben Grundlinie zu verwandeln.



Auflösung. Man ziehe in dem gegebenen Dreieck ABC die Höhe CH, halbire dieselbe in D und ziehe durch D eine Parallele mit AB. Errichtet man nun in A und B die Lothe AF und BE, so erhält man das verlangte Rechteck ABEF (§. 98. 2).

§. 114.

Aufgabe.

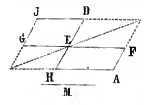
Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck von gleicher Höhe zu verwandeln.

Auflösung. Man halbire die Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABC, ziehe durch C eine Parallele mi AB und errichte die Senkrechten AF und DE, so ist ADEF das verlangte Rechteck (§. 98. 1).

* §. 115.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes gleichwinkliges von einer gegebenen Grundlinie zu verwandeln.

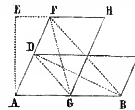


Auflösung. Es sei EGJD das gegebene Parallelogramm und M die Grundlinie des gesuchten. Man verlängere die Linie GE und mache EF = M. Hierauf verfahre man ferner, wie die Fig. es zeigt, so erhält man AHEF als das gesuchte Parallelogramm (§. 98. a).

* §. 116.

Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes gleichwinkliges von vorgeschriebener Höhe zu verwandeln.



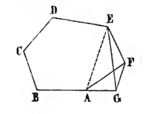
Auflösung. Es sei ABCD das gegebene Parallelogramm, und AE die Höhe des gesuchten. Man trage diese senkrecht in A auf AB; hierauf halbire man das gegebene Parallelogramm, und verwandle die eine Hälfte, nämlich das Dreieck ABD, in ein anderes AFG von der vorgeschriebenen Höhe AE, nach §. 112. Ergänzt man hierauf dieses Dreieck zu dem Parallelogramm AGHF, so wird letzteres das verlangte Parallelogramm sein.

Anmerkung. Man kann ebenso ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes gleichwinkliges von gegebener Grundlinie verwandeln, indem man das Verfahren des §. 111 anwendet.

§. 117.

Aufgabe.

Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.



Auflösung. Es sei z. B. ABCDEF ein gegebenes Sechseck.

Man ziehe die Diagonale EA, und mit dieser durch F die Parallele GF, welche die verlängerte BA in G schneidet. Zieht man alsdann noch EG, so erhält man das Fünfeck GBCDE, welches dem gegebenen Sechseck gleich sein wird.

Denn die beiden Dreiecke AEG und AEF sind gleich (§. 95), mithin auch AEG + ABCDE = AEF + ABCDE, d. h. es ist das Fünfeck GBCDE gleich dem Sechseck ABCDEF.

Ebenso würde man bei jedem andern gegebenen Vieleck verfahren.

§. 118.

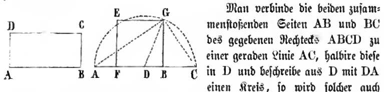
Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß man das erhaltene Fünfeck GBCDE durch ein ähnliches Verfahren hätte in ein Viereck und dieses in ein Dreieck verwandeln können, und überhaupt also, daß man jedes gegebene Vieleck, durch Wiederholung des gezeigten Verfahrens, in ein Dreieck von gleichem Inhalt verwandeln könne.

§. 119.

Aufgabe.

Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln.



Man verbinde die beiden zusammenstoßenden Seiten AB und BC des gegebenen Rechtecks ABCD zu einer geraden Linie AC, halbire diese in D und beschreibe aus D mit DA einen Kreis, so wird solcher auch durch C gehen. Nun errichte man in B auf AC ein Loth BG, das bis an die Peripherie des Kreises geht, so wird solches die Seite des gesuchten Quadrates und wenn man über GB das Quadrat BGEF construirt, das verlangte Quadrat sein.

Beweis.

Man ziehe AG, CG und DG. Nun ist im Dreieck ADG Winkel DAG = W. AGD; und im Dreieck CDG Winkel DCG = W. DGC (§. 43); also W. DAG + W. DCG = W. AGD + W. DGC = W. AGC; mithin W. AGC = 1 R (§. 39, 4). Da also das Dreieck AGC in G rechtwinklig ist,

so ist BG^2 oder BGEF = Rechteck (AB × BC) (§. 100, 3)
= Rechteck ABCD.

§. 120.

Zusatz.

Um ein gegebenes Dreieck in ein Quadrat von gleichem Inhalt zu verwandeln, verbinde man die Grundlinie des Dreiecks mit seiner halben Höhe zu einer geraden Linie und verfahre dann wie §. 119.

§. 121.

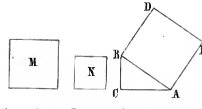
Zusatz.

Aus dem §. 117 erhellt, wie man jedes Vieleck in ein Dreieck und aus §. 120, wie man jedes Dreieck in ein Quadrat verwandeln könne. Man kann also, wenn man die letztere Verfahrungsweise an die erstere anschließt, jedes gegebene Vieleck in ein Quadrat von demselben Inhalt verwandeln.

§. 122.

Aufgabe.

Es sind zwei Quadrate M und N gegeben. Es soll ein drittes Quadrat gesucht werden, das so groß ist als die beiden gegebenen zusammen genommen.



Auflösung. Man verzeichne einen rechten Winkel ACB, mache den einen Schenkel AC desselben gleich der Seite des Quadrats M, den andern BC gleich der Seite des Quadrats N, und ziehe die Hypotenuse BC, so wird diese die Seite des gesuchten Quadrats sein (§. 99), und das Quadrat ABDE das verlangte.

§. 123.

Zusätze.

1) Um ein Quadrat zu verzeichnen, das doppelt so groß ist als ein gegebenes, ziehe man dessen Diagonale und errichte auf dieser ein Quadrat, so ist solches das verlangte.

2) Um ein Quadrat zu verzeichnen, das so groß ist als mehrere gegebene zusammen, zeichne man zuerst dasjenige Quadrat, welches der Summe des ersten und zweiten gegebenen gleich ist (§. 122); alsdann das Quadrat, welches so groß ist als das eben gefundene und das dritte gegebene, d. h. so groß als die drei ersten gegebenen Quadrate ꝛc. ꝛc..

3) Aus 2) ergibt sich auch, wie man ein Quadrat zu zeichnen habe, das ein bestimmtes Vielfache von einem Quadrat sein solle.

§. 124.

Aufgabe.

Es sind zwei Quadrate gegeben; man soll ein drittes finden, welches dem Unterschied der beiden gegebenen Quadrate gleich ist. (Vorige Figur.)

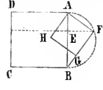
Auflösung. Es seien M und N die gegebenen Quadrate.

Man verzeichne einen rechten Winkel ACB und mache den einen Schenkel CB desselben gleich der Seite des kleineren Quadrates. Hierauf beschreibe man aus B mit der Eröffnung der Seite des größeren Quadrates einen Kreisbogen, der den andern Schenkel des rechten Winkels in A durchschneidet so wird AC die Seite des gesuchten Quadrates sein (§. 100. 1).

§. 125.

Aufgabe.

Es ist ein Quadrat gegeben. Man soll ein anderes construiren, welches ein bestimmter Theil des gegebenen ist.



Auflösung. Es sei ABCD das gegebene Quadrat. Soll nun das gesuchte z. B. der dritte Theil von ABCD sein, so theile man AB in drei gleiche Theile, so daß AE = $^1/_3$ AB. Hierauf beschreibe man über AB den Halbkreis AFB und errichte das Loth EF, so wird AF die Seite des gesuchten Quadrates und Quadr. AFGH das verlangte Quadrat sein.

Beweis.

Da AFB ein in F rechtwinkliges Dreieck ist (s. Beweis zu §. 119), so ist AF^2 = Rechteck (AB $\times$ AE) (§. 100. 2).

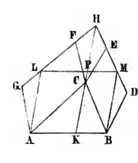
Da nun Rechteck (AB $\times$ AE) der dritte Theil des Quadrats ABCD (§. 94. a), so muß auch AF^2 oder AFGH der dritte Theil von ABCD sein.

Anhang zum dritten Abschnitt.

Lehrsatz.

Wenn man über zwei Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC beliebige Parallelogramme construirt, und in diesen die Gegenseiten von AC und BC d. h. GF und DE bis zu ihrem Durchschnittspunkt H verlängert, hierauf aus H durch den gemeinschaftlichen Endpunkt C von AC und BC eine Linie HK bis zur Grundlinie, und aus den Endpunkten A und B dieser letzteren Parallelen mit HK zieht, welche GF und DE in L und M treffen, so entsteht, wenn man L und M verbindet, ein Parallelogramm, das so groß ist als die Summe der beiden zuerst construirten Parallelogramme.

Beweis.

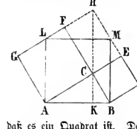


Da ACHL und BCHM Parallelogramme (§. 71), so ist AL = HC und BM = HC (§. 73), also AL = BM, mithin ist auch ABML ein Parallelogramm (§. 75). Nun ist AKPL = ALHC (§. 94), und ALHC = ACFG; also auch AKPL = ACFG. Eben so ist BMPK = BMHC (§. 94) und BMHC = BCED; also auch BMPK = BCED. Folglich AKPL + BMPK = ACFG + BCED; d. h. ABML = ACFG + BCED.

(Dieser Satz ist von Pappus aus Alexandrien, der im 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung lebte.)

Zusatz.

Es ist sehr leicht, den pythagoräischen Lehrsatz aus dem viel allgemeineren Satze des Pappus herzuleiten. Ist nämlich ACB ein in C rechtwinkliges Dreieck und errichtet man auf den Katheten AC und BC Quadrate ACFG und BCED, verlängert ihre Seiten GF und DE bis zu ihrem Durchschnitt H und zieht durch C die Gerade HK, so ist FCEH ein Rechteck (§. 76. 3) und HC seine Diagonale. Zieht man endlich durch A und B mit HK die Parallelen AL und BM und verbindet L und M, so erhält man das Parallelogramm ABML, von dem sich nachweisen läßt, daß es ein Quadrat ist. Denn es ist DE = BC = MH, folglich auch DM = EH = CF = AC. Mithin sind die Dreiecke DMB und ACB congruent, also AB = BM und folglich ABML gleichseitig. Da aber auch W. DBM + W. CBM = W. ABC + W. CBM = 1 R, so ist ABML auch rechtwinklig (§. 76. 3) und folglich ein Quadrat. Dieses Quadrat ist aber nach dem Lehrsatz des Pappus den Quadraten über AC und BC zusammen genommen gleich.



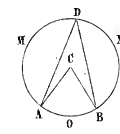
Vierter Abschnitt.

Von den Linien und Winkeln am Kreise.

§. 126.

Erklärungen.

Ein Winkel ACB, der von zwei Radien gebildet wird, heißt ein Mittelpunkts- oder Centri-Winkel. Man sagt, der Mittelpunkts-Winkel ACB als hohler Winkel betrachtet, stehe auf dem Bogen AOB, der zwischen seinen beiden Schenkeln enthalten ist. — Betrachtet man hingegen den Winkel ACB als erhabenen Winkel, so steht er auf dem Bogen AMDNB, der den vorigen zum Kreise ergänzt.



Ein Winkel ADB, der mit seiner Spitze in der Peripherie eines Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen desselben Kreises sind, heißt ein Peripherie-Winkel. Man sagt, der Peripherie-Winkel ADB stehe auf dem Bogen oder Abschnitt AOB, der zwischen seinen Schenkeln liegt, oder er liege in dem Bogen oder Abschnitt AMDNB, der den vorigen AOB zum Kreise ergänzt.

Anmerkung. Wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist in der Folge immer, so oft von einem Centri-Winkel die Rede ist, der hohle darunter zu verstehen.

§. 127.

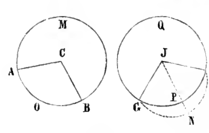
Lehrsatz.

Wenn in einem oder in zwei gleichen (d. h. mit einerlei Halbmesser beschriebenen) Kreisen zwei Centri-Winkel gleich sind, so sind es auch die dazu gehörigen Bogen.

Voraussetzung. In den gleichen Kreisen um C und J sind die beiden Centri-Winkel ACB und GJH gleich.

Bewiesen soll werden, daß die Bogen, auf welchen sie stehen, ebenfalls gleich sind.

Beweis.



Man lege den Kreis um C so auf den um J, daß C auf J und AC in die Richtung von JG falle, so fällt G auf J, weil CA = JG (V.). Weil ferner Winkel ACB = W. GJH, so muß CB auf JH fallen, und also B auch auf H.

Da nun der Punkt A auf G und B auf H fällt, so muß der Bogen AOB auf GPH fallen. Denn fiele der Bogen AOB z. B. in die Lage GNH, so wären die zu den Bogen GPH und GNH gehörigen Halbmesser JP und JN ungleich, was der Voraussetzung widerspräche. Die Bogen AOB und GPH decken sich also vollkommen, d. h. sie sind gleich.

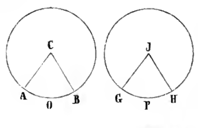
Zusatz.

In gleicher Weise zeigt man, daß Bogen BMA den Bogen HOG deckt; es fällt also die Peripherie des Kreises um C ganz auf die des Kreises um J, d. h. Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.

§. 128.

Lehrsatz.

Wenn in einem oder in zwei gleichen Kreisen zwei Bogen gleich groß sind, so sind es auch die darauf stehenden Centri-Winkel.



Voraussetzung. In den gleichen Kreisen um C und J sind die beiden Bogen AOB und GPH gleich groß.

Bewiesen soll werden, daß auch die auf ihnen stehenden Centri-Winkel ACB und GJH gleich sind.

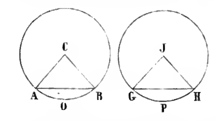
Beweis.

Man lege den Kreis um C so auf den um J daß C auf J und Halbmesser CA in die Richtung JG fällt, so fällt A auf G, weil die Halbmesser gleich sind und Bogen AB auf die Peripherie des Kreises um J, weil die Kreise congruent sind (§. 128, Zus.). Da nun Bogen AB = GH (V.) so muß B auf H und also CB auf HJ fallen. Die Winkel ACB und GJH sind also gleich.

§. 129.

Zusätze.

1) Sind zwei Sehnen einander gleich, entweder in demselben oder in zwei gleichen Kreisen, so sind es auch die dazu gehörigen Bogen.



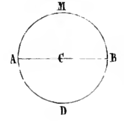
Denn wenn die Sehne AB = GH, so sind die Dreiecke ACB und GJH congruent (§. 53), und mithin die Winkel ACB und GJH gleich. Daraus aber folgt die Gleichheit der Bogen AOB und GPH (§. 127).

2) Wenn in demselben oder in zwei gleichen Kreisen zwei Bogen gleich groß sind, so sind es auch die dazu gehörigen Sehnen.

Ist z. B. der Bogen AOB = GPH, so sind die beiden Winkel ACB und GJH gleich (§. 128), und also die Dreiecke ACB und GJH congruent (§. 41); mithin die Sehne AB = GH.

3) Wenn in demselben oder in zwei gleichen Kreisen entweder zwei Centri-Winkel, oder zwei Bogen, oder zwei Sehnen gleich sind, so sind es auch die dazu gehörigen Ausschnitte und Abschnitte.

Dieß Alles lehrt der bloße Anblick der Figur.



4) Der Durchmesser theilt sowohl die Kreislinie als auch den Kreis in zwei gleiche Theile.

Da die beiden Radien CA und CB, aus denen der Durchmesser besteht, auf beiden Seiten von AB einen flachen Winkel bilden, so ist der Bogen AMB = ADB (§. 127) und der Ausschnitt ACBM = dem Ausschnitt ACBD (Nr. 3).

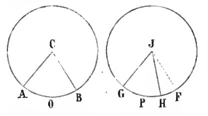
§. 130.

Lehrsatz.

Wenn in demselben oder in zwei gleichen Kreisen zwei Winkel am Mittelpunkt ungleich sind, so sind es auch die Bogen, auf welchen sie stehen, und zwar steht der größere Mittelpunktswinkel auch auf einem größeren Bogen.

Voraussetzung. In den gleichen Kreisen um C und J sei der Mittelpunkts-Winkel ACB größer als der Mittelpunkts-Winkel GJH.

Bewiesen soll werden, daß der Bogen AOB größer ist als der Bogen GPH.

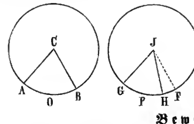


Man lege den Kreis um C so auf den um J, daß C auf J und CA in JG fällt, so wird A auf J und die Peripherie des Kreises um C auf die um J fallen (§. 127, Zusatz) und weil Winkel ACB größer als W. GJH, so wird CB außerhalb des Winkels GJH also etwa in JF und mithin B auf F fallen. Alsdann ist W. ACB = W. GJF, und Bogen AOB = B. GPF. Da aber Bogen GPF größer ist als GPH, so muß auch B. AOB größer sein als B. GPH.

§. 131.

Lehrsatz.

Wenn in demselben oder in zwei gleichen Kreisen zwei Bogen ungleich sind, so sind es auch die dazu gehörigen Mittelpunkts-Winkel, und zwar gehört zu dem größern Bogen der größere Mittelpunkts-Winkel.



Voraussetzung. In den gleichen Kreisen um C und J sei der Bogen AOB größer als der Bogen GPH.

Bewiesen soll werden, daß der Winkel ACB größer ist, als der Winkel GJH.

Beweis.

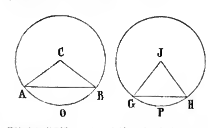
Legt man den Kreis um C so auf den um J, daß C auf J, CA in JG, so fällt A auf G (B.), und die Peripherie des Kreises um A wird auf die um J fallen. Da der Bogen AOB größer ist als B. GPH, so muß B über H hinausfallen, etwa in F. Dann fällt BC in die Richtung von JF und es ist offenbar Winkel ACB größer als W. GJH.

§. 132.

Zusätze.

1) Wenn in demselben, oder in zwei gleichen Kreisen zwei Sehnen ungleich sind, so gehört zur größeren ein größerer Bogen.

Ist z. B. die Sehne AB größer als die Sehne GH, so ist auch der Winkel ACB größer als der Winkel GJH (§. 52) und mithin Bogen AOB größer als der Bogen GPH.



2) Wenn in einem oder in zwei gleichen Kreisen zwei Bogen ungleich sind, so gehört zu dem größeren eine größere Sehne.

Ist z. B. der Bogen AOB größer als GPH, so ist auch der Winkel ACB größer als der Winkel GJH, und mithin die Sehne AB größer als GH (§. 51).

3) Wenn in demselben oder in zwei gleichen Kreisen zwei Centri-Winkel, oder zwei Bogen, oder zwei Sehnen ungleich sind, so sind es auch die dazu gehörigen Ausschnitte und Abschnitte.

Anmerkung. Denkt man sich den Winkel ACB in beliebig viele gleiche Theile getheilt, durch Linien, die man aus der Spitze C desselben zwischen seinen Schenkeln zieht, so wird dadurch auch der Bogen AB in ebenso viele gleiche Theile getheilt, wie der Winkel ACB.

Ist ACB ein rechter Winkel und auf die angegebene Art in 90 gleiche Theile (Winkelgrade) getheilt, so wird dadurch auch der dazu gehörige Bogen AB (den man in diesem Falle einen Quadranten nennt) in 90 gleiche Theile getheilt, welche man Bogengrade nennt. Da nun der Quadrant AB der vierte Theil von der ganzen Kreislinie ist, so wird diese 360 solcher Bogengrade enthalten, welche bald größer, bald kleiner sein werden, je nachdem die Kreislinie mit einem größeren oder kleineren Halbmesser beschrieben ist.

Ein Bogengrad ist also der 360ste Theil der ganzen Kreislinie. Den Bogengrad denkt man sich wieder in 60 gleiche Theile, Bogen-Minuten, und letztere wieder in 60 Bogen-Sekunden getheilt. Denkt man sich nun zwischen den Schenkeln eines beliebigen Winkels aus dessen Spitze mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen beschrieben, so enthält der Winkel genau so viele Winkel-Grade, Winkel-Minuten und Winkel-Sekunden, als jener Bogen Bogen-Grade, Bogen-Minuten und Bogen-Sekunden enthält.

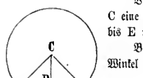
In diesem Sinne ist es zu nehmen, wenn man sagt, ein Winkel werde durch den Bogen gemessen, der mit einem beliebigen Halbmesser zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird.

§. 133.

Lehrsatz.

Wenn man aus dem Mittelpunkt eines Kreises eine Senkrechte nach einer Sehne zieht, so wird dadurch 1) die Sehne

2) der dazu gehörige Mittelpunkts-Winkel, und 3) der dazu gehörige Bogen halbirt.



Voraussetzung. Man hat aus dem Mittelpunkt C eine Senkrechte CD nach der Sehne AB gezogen und bis E verlängert.

Bewiesen soll werden, daß AD = DB, Winkel ACE = W. BCE und Bogen AE = BE ist.

Beweis.

1) Die Dreiecke ACD und BCD sind congruent (§. 55, 4), folglich ist AD = BD.

2) Aus der Congruenz der Dreiecke ACD und BCD folgt auch die Gleichheit der Winkel ACE und BCE, und daraus

3) die Gleichheit der Bogen AE und BE (§. 127).

Anmerkung. Der Beweis dieses Satzes folgt auch aus §. 43, a. Nr. 3.

§. 134.

Lehrsatz.

Wenn man aus dem Mittelpunkt eines Kreises eine Linie durch die Mitte einer Sehne zieht, so steht sie senkrecht auf der Sehne, und halbirt den dazu gehörigen Mittelpunkts-Winkel und Bogen.

Voraussetzung. Man hat aus C die Linie CE durch die Mitte D der Sehne AB gezogen.

Bewiesen soll werden, daß CE senkrecht auf AB steht, und den Winkel ACB so wie den Bogen AEB halbirt.

Beweis.

Die Dreiecke ACD und BCD sind congruent (§. 53), mithin ist Winkel ADC = Winkel BDC, und also CD senkrecht auf AB (§. 18). Daraus folgt auch, daß Winkel ACE = Winkel BCE und Bogen AE = Bogen BE (§. 133).

Anmerkung. Der Beweis folgt unmittelbar auch aus §. 43. a. Nr. 1.

§. 135.

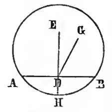
Lehrsatz.

Wenn man auf der Mitte einer Sehne eine Senkrechte errichtet, so geht solche durch den Mittelpunkt des Kreises, und halbirt den zur Sehne gehörigen Mittelpunkts-Winkel und Bogen.

Voraussetzung. Man hat auf der Mitte der Sehne AB die Senkrechte DE errichtet.

Bewiesen soll werden, daß sie durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und den zu AB gehörigen Mittelpunkts-Winkel und Bogen halbirt.

Beweis.



Angenommen, der Mittelpunkt des Kreises liege nicht in DE, sondern in G, so müßte GD senkrecht auf AB stehen (§. 134). Nun steht nach der Voraussetzung DE ebenfalls in D senkrecht auf AB, folglich muß GD mit DE zusammen (§. 39, b) — und also der Mittelpunkt G in HE fallen. Das übrige zu Erweisende folgt nun aus §. 133.

Anmerkung. Der Beweis folgt auch unmittelbar aus §. 43. a. Nr. 4.

§. 135. a.

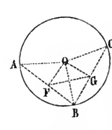
Lehrsatz.

Durch drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, ist allemal eine Kreislinie, aber auch nur eine einzige möglich.

Voraussetzung. Es seien A, B und C drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen.

Bewiesen soll werden, daß durch diese drei Punkte allemal eine Kreislinie, aber auch nur eine einzige, möglich ist.

Beweis.



Man ziehe AB und BC, halbire sie in F und G, und errichte in diesen Punkten auf AB und BC die Senkrechten FO und GO, welche sich in einem Punkte O schneiden werden (denn zieht man FG, so sind die beiden Winkel OFG und OGF zusammen kleiner als 2 Rechte, folglich schneiden sich die Linien FO und GO auf dieser Seite, nach §. 39, 7. Nun sind die beiden Dreiecke AFO und BFO congruent (§. 41), folglich AO $=$ BO. Eben so sind die Dreiecke BGO und CGO congruent; folglich BO $=$ CO. Aus der Gleichheit der drei Geraden AO, BO und CO folgt aber, daß der Punkt O von den drei Punkten A, B und C gleichweit entfernt ist, und daß also ein aus O mit dem Halbmesser OA beschriebener Kreis auch durch B und C gehen muß.

Gesetzt nun, eine zweite Kreislinie ginge auch durch A, B und C hindurch, so wären AB und BC Sehnen derselben, und die auf ihren Mitten

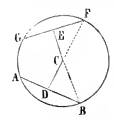
errichteten Senkrechten FO und GO würden sich im Mittelpunkt O dieser zweiten Kreislinie schneiden (§. 135). Die zweite Kreislinie hätte also mit der ersten einerlei Mittelpunkt und gleichen Halbmesser OA und würde also mit ihr zusammen fallen.

Anmerkung. Man kann um jedes Dreieck einen Kreis, und zwar nur einen einzigen beschreiben, welcher durch die drei Spitzen desselben geht. (Vergl. auch Anhang zum 2. Abschnitt, Lehrs. 1).

§. 136.

Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen gleich groß sind, so sind sie auch gleich weit vom Mittelpunkt entfernt.



Voraussetzung. Die beiden Sehnen AB und GF sind gleich.

Bewiesen soll werden, daß sie gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, d. h. daß die Senkrechte CD gleich der Senkrechten CE ist (§. 48. 2. Anmerk.).

Beweis.

Man ziehe CB und CF; da nun AB = GF (V.), so ist auch DB = EF (§. 133. a); und weil ferner CB = CF (§. 22), und die Winkel bei D und E Rechte sind, so sind auch die Dreiecke CDB und CEF congruent (§. 54. a. 4), mithin CD = CE.

§. 137.

Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, so sind sie gleich.

Voraussetzung. Die Sehnen AB und GF sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt, d. h. die Senkrechte CD ist so groß als die Senkrechte CE.

Bewiesen soll werden, daß AB = GF.

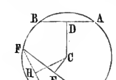
Beweis.

Zieht man wieder CB und CF, so sind die Dreiecke CDB und CEF congruent (§. 54. a. 4); also DB = EF. Da aber diese beiden Linien die Hälften der Sehnen AB und GF sind (§. 133), so müssen letztere selbst gleich sein.

§. 138.

Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen ungleich sind, so sind sie auch ungleich weit vom Mittelpunkt entfernt, und zwar ist die kleinere weiter entfernt als die größere.



Voraussetzung. Die Sehne AB ist kleiner als die Sehne GF.

Bewiesen soll werden, daß AB weiter vom Mittelpunkt C entfernt ist als GF, d. h. daß die Senkrechte CD größer ist als CE.

Beweis.

Man mache FJ = AB und ziehe die Senkrechte CH, so wird solche = CD sein (§. 136). Da nun CO größer ist als CE (§. 48. 2), so wird um so mehr CH größer als CE sein. Folglich ist auch CD größer als CE.

§. 139.

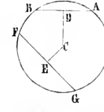
Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen ungleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, so sind sie ungleich, und zwar ist die entferntere kleiner als die nähere.

Voraussetzung. Die Sehne AB ist weiter vom Mittelpunkt C entfernt als die Sehne GF, d. h, CD ist größer als CE.

Bewiesen soll werden, daß AB kleiner ist als GF.

Beweis.



Wäre die Sehne AB nicht kleiner als GF, so müßte sie entweder so groß oder größer als GF sein.

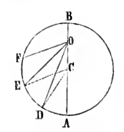
Wäre AB = GF, so müßte auch CD = CE sein (§. 136); wäre hingegen AB größer als GF, so wäre CD kleiner als CE (§. 138). Beides aber ist gegen die Voraussetzung. Folglich muß AB kleiner als GF sein.

Anmerkung. Der Durchmesser eines Kreises ist also die größte Sehne in demselben.

* §. 139. a.

Lehrsatz.

Von allen geraden Linien, welche man aus einem innerhalb eines Kreises liegenden Punkt, welcher nicht der Mittelpunkt ist, nach der Peripherie ziehen kann, ist 1) diejenige, welche durch den Mittelpunkt geht, die größte und ihre Rückverlängerung (Ergänzung zum Durchmesser) die kleinste; 2) die übrigen aus demselben Punkt nach der Peripherie gezogenen Geraden aber werden immer kleiner, je weiter sie sich von der größten entfernen.



Voraussetzung. Man hat aus dem Punkte O innerhalb des Kreises die Linien OA, OD, OE, OF u. s. w. an die Peripherie gezogen.

Bewiesen soll werden, 1) daß die durch den Mittelpunkt C gehende Gerade OA die größte, ihre Rückverlängerung OB die kleinste ist; 2) daß $OD > OE$, $OE > OF$ u. s. w.

Beweis.

1) Man ziehe CD, so ist $OC + CD > OD$ (§. 49);
da aber $CD = CA$,
so ist auch $OC + CA > OD$,
folglich $OA > OD$.
Da ferner $CD < CO + OD$,
und $CD = CB$,
$= CO + OB$,
so ist auch $CO + OB < CO + OD$,
folglich $OB < OD$.

Eben so beweist man, daß OA größer und OB kleiner ist als jede der andern aus O gezogenen Geraden.

2) Zieht man CE, so ist in den Dreiecken OCD und OCE die Seite $OC = OC$, $CD = CE$, Winkel $OCD >$ W. OCE; mithin $OD > OE$ (§. 51). Eben so beweist man, daß $OE > OF$ u. s. w.

*** Zusätze.**

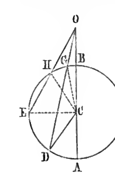
1) Aus O sind nur je zwei gleichlange gerade Linien an die Kreislinie möglich; diejenigen nämlich, welche auf beiden Seiten des Durchmessers AB liegend, gleiche Winkel mit diesem bilden.

2) Sind von einem innerhalb des Kreises liegenden Punkte mehr als zwei gleiche Gerade an die Kreislinie möglich, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

* §. 139. b.

Lehrsatz.

Von allen Geraden, welche man aus einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkt an die Kreislinie ziehen kann, ist 1) diejenige die größte, welche, durch den Mittelpunkt gehend, die Kreislinie auf der hohlen Seite trifft; 2) die übrigen aus demselben Punkt gezogenen Geraden, welche die Kreislinie auf dieselbe Art treffen, werden immer kleiner, je weiter sie sich von der größten entfernen; 3) von den außerhalb des Kreises liegenden Abschnitten dieser Geraden ist derjenige der kleinste, welcher der größten Linie angehört, die übrigen werden um so größer, je weiter sie sich von diesem kleinsten entfernen.



Voraussetzung. Man hat aus dem Punkt O die Geraden OA, OD, OE u. s. w. gezogen, welche in A, D, E u. s. w. die Kreislinie auf der hohlen Seite treffen.

Bewiesen soll werden, 1) daß die durch den Mittelpunkt C gehende Gerade OA unter allen die größte ist; 2) das $OD > OE$ u. s. w., endlich 3) daß unter den außerhalb des Kreises liegenden Abschnitten dieser Linien OB der kleinste ist, und $OG < OH$ u. s. w.

Beweis.

1) Zieht man CD, so ist $OC + CD > OD$,
da aber $CD = CA$,
so ist auch $OC + CA > OD$,
d. h. $OA > OD$,

2) Daß $OD > OE$, folgt aus §. 51.

3) Zieht man CG, so ist $CB + BO < CG + GO$. Da aber $CB = CG$, so ist $BO < GO$.

Zieht man ferner CH, so ist $CG + GO < CH + HO$ (§. 50. 2). Da aber $CG = CH$, so ist $GO < HO$ u. s. w.

* Zusatz.

Von dem Punkt O sind nur je zwei gleich lange Gerade an die Kreislinie möglich; diejenigen nämlich, welche, auf beiden Seiten von AO liegend,

gleiche Winkel mit dieser Geraden bilden und die Kreislinie auf derselben (hohlen oder erhabenen) Seite treffen.

§. 140.

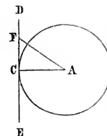
Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie senkrecht auf dem Endpunkt des Halbmessers steht, so hat sie nur diesen einzigen Punkt mit der Peripherie des Kreises gemeinschaftlich, und liegt mit allen ihren übrigen Punkten außerhalb des Kreises.

Voraussetzung. Man hat auf dem Endpunkte C des Halbmessers AC die Linie DE senkrecht errichtet.

Bewiesen soll werden, daß DE nur den Punkt C mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, in allen übrigen Punkten aber außerhalb desselben liegt.

Beweis.



Zieht man nach irgend einem andern Punkt F der Linie DE die Gerade AF, so ist solche größer als AC (§. 48. 2). Der Punkt F liegt also weiter von A entfernt als der Punkt C. Da aber C in der Peripherie des Kreises liegt, so muß demnach F außerhalb des Kreises liegen. Dieses läßt sich von jedem Punkt der Geraden DE, den Punkt C ausgenommen, auf dieselbe Art erweisen. Die Gerade DE hat also nur den Punkt C mit der Peripherie des Kreises gemeinschaftlich und liegt in allen ihren übrigen Punkten außerhalb des Kreises.

§. 141.

Erklärung.

Eine solche Gerade, die nur einen Punkt mit der Peripherie des Kreises gemeinschaftlich hat, sonst aber ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Tangente oder Berührungs-Linie des Kreises.

§. 142.

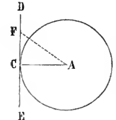
Lehrsatz.

Wenn man nach dem Berührungs-Punkt einer Tangente einen Halbmesser zieht, so steht solcher senkrecht auf der Tangente.

Voraussetzung. DE ist eine Tangente und C ihr Berührungspunkt mit dem Kreise.

Bewiesen soll werden, daß der Halbmesser AC, welchen man nach C gezogen, senkrecht auf DE stehe.

Beweis.



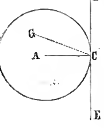
Wäre AC nicht senkrecht auf DE, so sei es eine andere von A nach DE gezogene Gerade AF. Da nun F außerhalb, C aber auf der Peripherie liegt, so ist AF > als AC, im Widerspruch mit §. 48. 2. Also kann weder AF noch irgend eine andere aus A nach DE gezogene Gerade senkrecht auf DE sein, ausgenommen AC.

§. 143.

Lehrsatz.

Wenn man in dem Berührungs-Punkte einer Tangente eine Senkrechte auf dieselbe errichtet, so geht solche durch den Mittelpunkt des Kreises.

Voraussetzung. CA steht senkrecht auf dem Berührungs-Punkt C der Tangente DE.



Bewiesen soll werden, daß CA durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Beweis.

Läge der Mittelpunkt nicht in der Geraden CA, sondern z. B. in G, so müßte GC senkrecht auf DE stehen (§. 142) und würde also mit CA zusammen fallen (§. 18). Alsdann fiele aber auch der Mittelpunkt G in CA.

§. 144.

Lehrsatz.

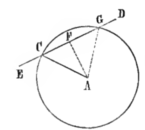
Steht eine Gerade schief auf dem Endpunkt eines Halbmessers, so durchschneidet sie den Kreis in zwei Punkten.

Voraussetzung. Die Gerade DE steht schief auf dem Endpunkt C des Halbmessers AC.

Bewiesen soll werden, daß sie den Kreis in zwei Punkten durchschneidet.

Beweis.

Man fälle aus A auf ED das Loth AF. Nun ist AF kleiner als AC (§. 48. 2) und mithin muß der Punkt F innerhalb des Kreises liegen.



Macht man ferner FG = FC und zieht AG, so folgt aus der Congruenz der Dreiecke AFC und AFG (§. 41), daß AG = AC ist. Der Punkt G der Linie DE liegt also wieder in der Peripherie des Kreises. Alle Linien nun, die man aus dem Punkt A nach den Punkten des zwischen G und C gelegenen Stücks der Linie DE zieht, sind kleiner AG oder AC (§. 48. 3), und mithin liegen jene Punkte, also das Stück GC selbst, innerhalb des Kreises.

Alle übrigen Linien aber, die man aus A nach den außerhalb des Stücks GC gelegenen Punkten der Linie DE zieht, sind größer als AG oder AC, und also liegen alle jene Punkte außerhalb des Kreises.

Die Linie DE durchschneidet also den Kreis nur in den zwei Punkten G und C.

Anmerkung. Man nennt eine solche Linie eine Secante des Kreises.

* §. 144. a.

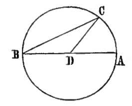
Zusatz.

Von dem Berührungspunkt aus ist zwischen dem Kreis und der Tangente keine Gerade möglich, die den Kreis nicht schnitte. Denn, entweder müßte die Gerade den Kreis berühren oder schneiden. Ersteres ist unmöglich (§. 18), also muß das zweite stattfinden.

§. 145.

Lehrsatz.

Jeder Peripherie-Winkel ist halb so groß als der Centri-Winkel, mit welchem er auf dem nämlichen Bogen steht.



Voraussetzung. Der Peripheriewinkel ABC steht auf dem nämlichen Bogen wie der Centriwinkel ADC.

Bewiesen soll werden, daß Winkel ABC = ½ W. ADC.

Beweis.

1) Der Mittelpunkt des Kreises liegt in einem Schenkel des Peripheriewinkels.

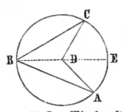
Winkel ADC = W. DBC + BCD (§. 36).

W. BCD = W. DBC (§. 43), folglich

W. ADC = 2 W. DBC oder 2 W. ABC, somit

W. ABC = $^1/_2$ W. ADC.

2) Der Mittelpunkt des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels.



Man ziehe den Durchmesser BE, so ist nach dem ersten Fall

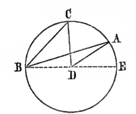
Winkel CBE = $^1/_2$ W. CDE,

W. ABE = $^1/_2$ W. ADE, somit

W. CBE + ABC = $^1/_2$ W. CDE + $^1/_2$ W. ADE (Grundſ. IV.),

d. i. W. ABC = $^1/_2$ W. ADC.

3) Der Mittelpunkt des Kreises liegt außerhalb des Peripheriewinkels.



Man ziehe den Durchmesser BE, so ist nach dem ersten Fall

Winkel CBE = $^1/_2$ W. CDE,

W. ABE = $^1/_2$ W. ADE, somit

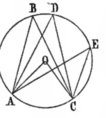
W. CBE — W. ABE = $^1/_2$ W. CDE — $^1/_2$ W. ADE (Grundſ. V.)

d. i. W. ABC = $^1/_2$ W. ACD.

§. 146.

Zusätze.

1) Alle Peripherie-Winkel ABC, ADC, AEC, welche auf demselben Bogen AC stehen, sind einander gleich, weil jeder derselben die Hälfte des Centri-Winkels AOC ist.



Eben so sind Peripherie-Winkel, welche auf gleichen Bogen stehen, einander gleich, und umgekehrt: Wenn zwei oder mehrere Peripherie-Winkel einander gleich sind, so sind auch die Bogen, auf welchen sie stehen, gleich.

* 2) Bogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich.

3) Jeder Peripherie-Winkel, der auf dem Halbkreise steht, ist ein Rechter.

Denn er ist die Hälfte eines flachen Centri-Winkels. (Dieser Satz ist schon §. 119 auf eine andere Art bewiesen worden.)

4) Jeder Peripherie-Winkel, der auf einem Bogen steht, welcher größer ist als der Halbkreis, ist ein stumpfer; und jeder Peripherie-Winkel, der auf einem Bogen steht, welcher kleiner ist als der Halbkreis, ist ein spitzer Winkel.

* 5) Wenn über einer gemeinschaftlichen Grundlinie mehrere Dreiecke construirt werden, deren Spitzenwinkel alle einander gleich sind, so liegen sämmtliche Spitzen in einer Kreislinie. Der Beweis indirekt.

Anmerkung. In Beziehung auf §. 145 und im Sinne von §. 132, Anmerkung, kann man sagen, ein Peripherie-Winkel habe den halben Bogen, auf dem er steht, zu seinem Maß.

Er wird nämlich halb so viele Winkelgrade, — Minuten und — Sekunden enthalten, als der Bogen, auf dem er steht, Bogengrade, — Minuten und — Secunden enthält.

§. 146. a.

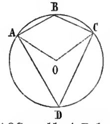
Lehrsatz.

In jedem Viereck, das in einen Kreis eingeschrieben ist, beträgt die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte.

Voraussetzung. Das Viereck ABCD ist in einen Kreis eingeschrieben, d. h. seine Seiten sind zugleich Sehnen des Kreises.

Bewiesen soll werden, daß Winkel ADC + W. ABC = 2 R, und ebenso W. BAD + W. BCD = 2 R.

Beweis.



W. ADC ist ein Peripherie-Winkel, und als solcher die Hälfte des hohlen Centri-Winkels AOC, mit dem er auf demselben Bogen ABC steht; ebenso ist ABC ein Peripherie-Winkel, und als solcher die Hälfte des erhabenen Centri-Winkels AOC, mit dem er auf demselben Bogen ADC steht. Die Summe der Winkel ADC und ABC ist also halb so groß als die Summe des hohlen und des erhabenen Winkels AOC, welche 4 R beträgt (§. 25. i); d. h. die Summe der Winkel ADC und ABC ist 2 R. Da aber die Summe der vier Winkel eines Vierecks = 2 R (§. 70), so ist auch die Summe der beiden andern Gegenwinkel BAD und BCD = 2 R.

* §. 146. b.

Zusatz.

Betragen je zwei Gegenwinkel eines Vierecks zusammen zwei Rechte, so muß eine durch drei Eckpunkte desselben gehende Kreislinie auch durch den vierten gehen. (Beweis indirekt.)

Man nennt ein solches Viereck wohl auch Kreisviereck.

§. 147.

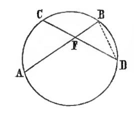
Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises durchschneiden, so ist jeder der dadurch entstehenden vier Winkel so groß als die Summe der beiden Peripherie-Winkel, die auf den zwischen seinen und seines Scheitelwinkels Schenkeln enthaltenen Bogen stehen.

Voraussetzung. Die beiden Sehnen AB und DC durchschneiden sich innerhalb des Kreises in dem Punkt F.

Bewiesen soll werden, daß jeder der dadurch entstehenden vier Winkel, z. B. der Winkel AFD, so groß ist als die zwei Peripherie-Winkel, welche auf den Bogen AD und CB stehen.

Beweis.



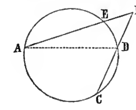
Man ziehe BD, so ist Winkel AFD so groß als die beiden Winkel B und D (§. 36); B aber ist der Peripherie-Winkel, welcher auf dem Bogen AD, und D der Peripherie-Winkel, welcher auf dem Bogen CB steht.

Anmerkung. Im Sinne des §. 132 kann man sagen, der Winkel AFD habe die halbe Summe der beiden Bogen AD und CB zu seinem Maß.

§. 148.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises treffen, so ist der dadurch entstehende Winkel so groß als der Unterschied der beiden Peripherie-Winkel, welche auf den zwischen den Schenkeln jenes ersteren Winkels enthaltenen Bogen stehen.



Voraussetzung. Die beiden Secanten AB und CB treffen sich außerhalb des Kreises in dem Punkte B.

Bewiesen soll werden, daß der dadurch entstehende Winkel ABC so groß ist als der Unterschied der beiden Peripherie-Winkel ADC und BAD, welche auf den Bogen AC und ED stehen.

Beweis.

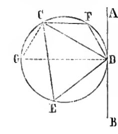
Da der Winkel ADC so groß ist als die zwei Winkel ABC und BAD (§. 36), so ist der Winkel ABC so groß als W. ADC weniger W. BAD.

Anmerkung. Man kann auch sagen, der Winkel ABC habe zu seinem Maß den halben Unterschied der zwei zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogen AC und DE.

§. 149.

Lehrsatz.

Wenn ein Winkel von einer Tangente und einer Sehne gebildet wird, so ist derselbe so groß als der Peripherie-Winkel, der auf dem zwischen den Schenkeln des ersteren Winkels enthaltenen Bogen steht.



Voraussetzung. Die Winkel CDA und CDB werden von einer Tangente und einer Sehne gebildet.

Bewiesen soll werden, 1) daß der Winkel CDA so groß ist als der Peripherie-Winkel CED, welcher auf dem Bogen CFD steht; und 2) daß der Winkel CDB so groß ist, als der Peripherie-Winkel CFD, welcher auf dem Bogen CGED steht.

Beweis.

1) Man ziehe den Durchmesser GD und hierauf GC, so ist Winkel GCD ein Rechter (§. 146. 3).

Folglich auch W. CGD + W. CDG = 1 R. (§. 39. 3);
ferner ist W. CDA + W. CDG = 1 R. (§. 142.),

also W. CGD + W. CDG = W. CDA + W. CDG,
also auch W. CGD = W. CDA,
und weil W. CGD = W. CED (§. 146. 1),

so ist auch W. CED = W. CDA.

2) In dem Viereck ECFD ist
W. CED + W. CFD = 2 R. (§. 146. a),
oder da W. CED = W. CDA (Nro. 1),

so ist auch W. CDA + W. CFD = 2 R.;
und weil W. CDA + W. CDB = 2 R.,

so ist auch W. CDA + W. CFD = W. CDA + W. CDB,
mithin auch W. CFD = W. CDB.

Anmerkung. Man kann auch sagen, der von einer Tangente und einer Sehne gebildete Winkel habe die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Bogens zu seinem Maß.

* §. 150.

Lehrsatz.

Wenn man durch die Endpunkte einer Sehne erstlich zwei Halbmesser und dann zwei Tangenten zieht, so ist der von den Halbmessern gebildete Mittelpunktswinkel das Supplement des von den Tangenten eingeschlossenen.

Der Beweis ergibt sich sehr leicht aus §. 70 und §. 142.

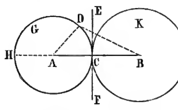
§. 151.

Lehrsatz.

Wenn man aus zwei Punkten einer Geraden durch einen beliebigen, zwischen ihnen, jedoch auf derselben Geraden liegenden Punkt, zwei Kreise beschreibt, so haben diese

1) nichts gemein als diesen einzigen Punkt, und jeder dieser Kreise liegt ganz außerhalb des andern.

2) Auch haben sie in diesem Punkt eine einzige gemeinschaftliche Tangente.



Voraussetzung. Man hat aus den Punkten A und B der Geraden AB durch den Punkt C derselben Geraden zwei Kreise beschrieben.

Bewiesen soll werden, 1) daß diese beiden Kreise nur den Punkt C gemein haben,

2) daß die in C senkrecht auf AB gezogene Linie EF ihre gemeinschaftliche Tangente sei.

Beweis.

1) Da $AB > BC$, so ist, wenn man BA bis H verlängert, $BH > BC$ und folglich liegt H außerhalb des Kreises K. Zieht man von dem beliebigen Punkt D des Kreises G nach den Mittelpunkten die Geraden DA und DB, so ist in dem Dreieck ABD

$$AD + DB > AB \text{ (§. 49) oder}$$
$$AD + DB > AC + BC.$$

Nimmt man auf der einen Seite AD und auf der andern die ihr gleiche AC hinweg, so bleibt DB $>$ BC; somit liegt D außerhalb des Kreises K. Ebenso läßt es sich von jedem andern Punkt des Kreises G zeigen, daß er außerhalb K liegt. In gleicher Weise zeigt man, daß der Kreis K außerhalb des Kreises G liegt.

2) Folgt aus §. 140.

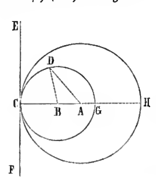
§. 152.

Lehrsatz.

Wenn man aus zwei Punkten einer Geraden durch einen dritten, der in der Verlängerung derselben liegt, zwei Kreise beschreibt, so haben diese

1) nichts gemein als diesen dritten Punkt; der kleinere Kreis aber liegt ganz innerhalb des größern.

2) Auch haben beide Kreise in dem Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.



Voraussetzung. Man hat aus den Punkten A und B durch den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt C zwei Kreise beschrieben.

Bewiesen soll werden, 1) daß beide Kreise nur diesen einzigen Punkt C gemein haben, und daß der kleinere ganz innerhalb des größeren Kreises liege.

2) Daß die in dem Punkt C auf AC errichtete Senkrechte EF ihre gemeinschaftliche Tangente sei.

Beweis.

1) Verlängere CA über A hinaus bis H. Da nun Halbmesser BC kleiner ist als AC, so ist auch Durchmesser CG kleiner als CH und somit liegt G innerhalb des Kreises um A.

Man verbinde den beliebigen Punkt D der Peripherie des Kreises um B mit den beiden Mittelpunkten, so ist AD $<$ AB $+$ BD (§. 49), oder wenn man für BD die ihr gleich große BC setzt, AD $<$ AB $+$ BC, d. i. AD $<$ AC, woraus folgt, daß der Punkt D innerhalb der Peripherie des Kreises um A liegt. Ebenso läßt es sich an jedem andern Punkt des kleineren Kreises zeigen, daß er innerhalb des Kreises um A liegt. Die beiden

Kreise haben also nur den Punkt C gemein und der kleinere liegt innerhalb des größern.

2) Folgt aus §. 140.

§. 153.

Erklärungen.

1) Zwei Kreise, deren Peripherien nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, berühren einander. — Die Berührung kann von innen oder von außen geschehen, je nachdem die Kreise in oder neben einander liegen.

2) Zwei Kreise, deren Peripherien nur zwei Punkte gemeinschaftlich haben, schneiden sich.

3) Zwei oder mehrere Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, aber verschiedene Halbmesser haben, heißen concentrische Kreise. Kreise hingegen, welche verschiedene Mittelpunkte haben, heißen excentrisch. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt die Centrallinie.

§. 154.

Zusätze.

* 1) Kreise, welche sich schneiden oder berühren, können nicht einerlei Mittelpunkt haben. Denn in Beziehung auf ihre gemeinschaftlichen Punkte hätten sie gleiche, im Uebrigen aber verschiedene Halbmesser, was unmöglich ist.

2) Zwei Kreise können sich in nicht mehr als zwei Punkten schneiden. Denn hätten sie außer diesen zweien nur noch einen Punkt gemeinschaftlich, so fielen ihre Peripherien in eine einzige zusammen (§. 135. a).

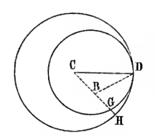
§. 155.

Lehrsatz.

Wenn zwei Kreise einander — entweder von außen oder von innen — berühren, so geht die Centrallinie durch den Berührungspunkt.

Beweis.

1) Die Kreise berühren sich von außen. Ginge nun die Centrallinie nicht durch den Berührungspunkt, so müßte sie jeden der beiden außerhalb einander liegenden Kreise in einem besondern Punkte schneiden, und das zwischen diesen beiden Durchschnittspunkten liegende Stück würde außerhalb beider Kreise fallen. Die ganze Centrallinie bestände also aus beiden Halbmessern und dem außerhalb des Kreises liegenden Stück. Denkt man sich nun aus dem Berührungspunkt nach beiden Mittelpunkten Halbmesser gezogen, so würden diese mit der Centrallinie ein Dreieck bilden, aber ihre Summe wäre kleiner als die Centrallinie, was unmöglich ist (§. 49).



2) Die Kreise berühren sich von innen. Läge nun der Mittelpunkt des innern Kreises nicht in der Geraden, die den Mittelpunkt C des größeren Kreises mit dem Berührungspunkte D verbindet, so liege er außerhalb derselben, etwa in B. Man ziehe BD und CB, und verlängere letztere Gerade nach G und H. Nun wäre $CB + BD > CD$ (§. 49); weil aber $CD = CH$, so wäre also $CB + BD > CH > CB + BH$; also $BD > BH$. Da aber, wenn B der Mittelpunkt des kleineren Kreises ist, $BD = BG$, so wäre $BG > BH$, was unmöglich ist.

* §. 155. a.

Zusätze.

Wenn also zwei Kreise in Einer Ebene liegen und es ist

1) die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich der Summe der Halbmesser, so berühren sie sich von außen (§. 151); ist ferner

2) die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich dem Unterschied der Halbmesser, so berühren sie sich von innen (§. 152).

3) Wenn zwei Kreise sich von außen oder von innen berühren, so liegen die Mittelpunkte und der Berührungspunkt in Einer geraden Linie (§. 155) und es ist also — im ersten Falle — die Summe, im andern die Differenz der Halbmesser gleich der Entfernung der Mittelpunkte.

4) Ist die Entfernung der Mittelpunkte größer als die Summe der Halbmesser, so liegen beide Kreise ganz außer einander, ohne sich zu berühren, und umgekehrt.

5) Ist die Entfernung der Mittelpunkte kleiner als der Unterschied der Halbmesser, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größern, ohne diesen jedoch zu berühren, und umgekehrt.

6) Ist die Entfernung der Mittelpunkte kleiner als die Summe der Halbmesser, aber größer als deren Unterschied, so schneiden sich die Kreise. Dieses läßt sich indirekt aus den vorangegangenen Zusätzen beweisen, oder auch daraus daß man in diesem Falle, über und unter der Entfernung der Mittelpunkte, mit den beiden Halbmessern zwei congruente Dreiecke construiren kann, deren Scheitel die Durchschnittspunkte der mit beiden Halbmessern beschriebenen Kreise werden.

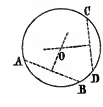
7) Wenn zwei Kreise sich schneiden, so steht die Centrallinie senkrecht auf der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise (§. 55).

Geometrische Auflösung verschiedener, auf die §§. 126—155 Bezug habender Aufgaben.

§. 156.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis gegeben, dessen Mittelpunkt gefunden werden soll.

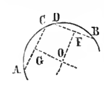


Auflösung. Man ziehe zwei (nicht parallele) Sehnen AB und CD, und halbire sie durch Senkrechte (§. 63). Der Punkt O, in welchem diese sich schneiden, ist der Mittelpunkt (§. 135).

§. 157.

Aufgabe.

Es ist ein Kreisbogen gegeben, man soll den Mittelpunkt des dazu gehörigen Kreises finden.



Auflösung. Man ziehe wieder die beiden Sehnen AC und BD, und errichte in ihrer Mitte die Senkrechten GO und FO, die sich in O schneiden; so ist O der gesuchte Mittelpunkt (§. 135).

§. 158.

Aufgabe.

Einen Kreisbogen in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man verbinde die beiden Endpunkte des Bogens durch eine Gerade und ziehe durch deren Mitte eine Senkrechte, so halbirt solche den Bogen (§. 135).

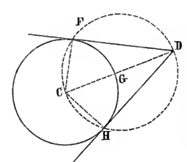
§. 159.

Aufgabe.

Es ist ein Kreis gegeben, man soll eine Tangente an denselben ziehen, welche durch einen bestimmten Punkt geht.

Der Punkt kann entweder auf der Peripherie des Kreises, oder außerhalb desselben gegeben sein.

Auflösung. Ist der Punkt, durch welchen die Tangente gehen soll, auf der Peripherie des Kreises um C gegeben, so ergibt sich die Auflösung aus §. 140.



Ist dieser Punkt hingegen außerhalb des Kreises um C gegeben, z. B. in D, so ziehe man die Gerade CD, halbire sie in G und beschreibe mit GC oder GD einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in zwei Punkten H und F schneiden wird. Zieht man nun entweder aus D nach H oder nach F eine Gerade, so erhält man jedenfalls die verlangte Tangente.

Man habe z. B. DF gezogen. Zieht man nun ferner noch CF, so ist DFC ein rechter Winkel (§. 146, 3); folglich steht DF senkrecht auf CF, und ist also eine Tangente an dem gegebenen Kreis (§. 140).

Zusätze.

1) Aus der Congruenz der Dreiecke DFC und DHC folgt, daß DF = DH.

2) Eine Gerade von F nach H gezogen, heißt die Berührungssehne des Punktes D.

§. 160.

Aufgabe.

Es sind drei Punkte gegeben, die nicht in gerader Linie liegen; man soll einen Kreis durch dieselben beschreiben.

Die Auflösung ergibt sich aus §. 135, a.

§. 161.

Aufgabe.

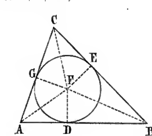
Es ist ein Dreieck gegeben, man soll einen Kreis um dasselbe beschreiben (der durch die drei Spitzen desselben geht).

Auflösung wie §. 160.

§. 162.

Aufgabe.

Es ist ein Dreieck gegeben, man soll einen Kreis in dasselbe einschreiben (so daß die Seiten des Dreiecks Tangenten an dem Kreise seien).



Auflösung. Es sei ABC das gegebene Dreieck.

Man halbire zwei seiner Winkel, z. B. A und B durch die Geraden AF und BF. Der Punkt F, in welchem diese sich schneiden, ist sodann der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, den man mit dem aus F auf eine der 3 Seiten des Dreiecks gefällten Lothe FD, FE oder FG ziehen kann.

Beweis.

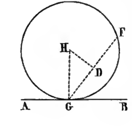
Die Dreiecke FGA und FDA sind congruent (§. 55, 3), mithin FD = FG. Ebenso sind die Dreiecke FDB und FEB congruent und mithin auch FD = FE.

Die drei Punkte G, D und E sind also gleichweit von F entfernt, und ein aus F mit FD beschriebener Kreis muß auch durch G und E gehen. Daß aber die drei Seiten des Dreiecks Tangenten an diesem Kreise sind, folgt aus §. 140. (Vergleiche auch Anhang zum 2ten Abschnitt, Lehrsatz 3).

§. 163.

Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine der Lage nach gegebene Linie AB in einem bestimmten Punkt G berührt, und durch einen andern gegebenen Punkt F geht.



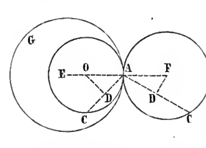
Auflösung. Man ziehe FG und errichte in ihrer Mitte die Senkrechte DH. Ebenso errichte man in G auf AB die Senkrechte GH. Der Punkt H, in welchem sich beide Senkrechte schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, den man mit der Eröffnung HG oder HF ziehen kann.

Beweis folgt aus §§. 135 und 140.

* §. 164.

Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen andern gegebenen Kreis G in dem Punkte A berührt und durch einen zweiten gegebenen Punkt C geht.



Auflösung. a) Wenn der Punkt C außerhalb des gegebenen Kreises liegt. Man ziehe AC und errichte in ihrer Mitte eine Senkrechte, welche den (§. 155) verlängerten Halbmesser OA in F schneidet; so wird F der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein, den man mit der Eröffnung FA oder FC ziehen kann.

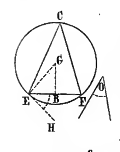
b) Wenn der Punkt C innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Die Auflösung zeigt die Figur.

Anmerkung. Die Auflösung wird unmöglich, wenn OAC = 1 R.

* §. 165.

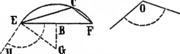
Aufgabe.

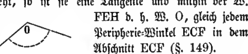
Ueber einer Geraden EF soll ein Kreisabschnitt beschrieben werden, in welchem alle Winkel einem gegebenen Winkel O gleich seien.



Auflösung. An den Punkt E der gegebenen Linie EF trage man den W. FEH = O. Nun errichte man in E auf EH die Senkrechte EG und aus der Mitte B von EF die Senkrechte BG. Der Punkt G, in welchem sich diese Senkrechten schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreisabschnittes, den man mit GE oder GF ziehen kann.

Denn da EH senkrecht auf dem Halbmesser GE steht, so ist sie eine Tangente und mithin der W. FEH d. h. W. O, gleich jedem Peripherie-Winkel ECF in dem Abschnitt ECF (§. 149).



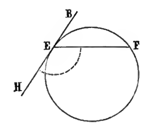


Anmerkung. Ist der gegebene Winkel ein Rechter, so darf man nur über der gegebenen Geraden EF einen Halbkreis beschreiben (§. 146, 3).

* §. 165. a.

Aufgabe.

Man soll von einem gegebenen Kreis durch eine Sehne einen Kreisabschnitt abschneiden, welcher einen gegebenen Winkel O fasse.



Auflösung. Man nehme auf der Peripherie des Kreises einen Punkt E beliebig an, ziehe an diesen Punkt die Tangente EH, und trage an den Punkt E dieser Tangente den Winkel BEF = O an, so ist der von dem Schenkel EF dieses Winkels abgeschnittene (nicht zwischen HEF liegende) Kreisabschnitt der verlangte (§. 149).

Fünfter Abschnitt.

Proportionalität der Linien, Winkel und Flächenräume.

§. 166.

Erklärungen.

1) Eine gerade Linie a heißt das Maß einer andern Geraden A, wenn sie ein genauer Theil dieser letzteren ist.

Aehnliches läßt sich von zwei Winkeln, von zwei Flächen, überhaupt von zwei gleichartigen Größen sagen.

2) Zwei gerade Linien A und B heißen commensurabel, wenn es ein Maß von A gibt, welches zugleich ein Maß von B ist. Dieses Maß heißt das gemeinschaftliche.*)

Zwei gerade Linien X und Y heißen incommensurabel, wenn es kein Maß von X gibt, das zugleich ein Maß von Y wäre.

Aehnliches gilt von Winkeln, Flächen und überhaupt von gleichartigen Größen.

*) Siehe im Anhang dieses Abschnitts die Aufgabe: Zu zwei Geraden das gemeinschaftliche Maß zu finden.

3) Das Verhältniß zweier Geraden A und B wird gefunden, wenn man untersucht, wie viel mal die eine in der andern enthalten ist. Enthält nun A das Maß a z. B. m mal, und die andere B dasselbe Maß n mal,

so ist also ihr Verhältniß $m\,a : n\,a$ oder $\frac{m\,a}{n\,a} = \frac{m}{n} = m : n$.

Das Verhältniß zweier Geraden ist also gleich dem Quotienten der Maßzahlen, die man erhält, wenn man beide Gerade durch einerlei Maß mißt. Dasselbe gilt von dem Verhältniß je zweier anderer gleichartigen Größen. Um auszudrücken, daß das Verhältniß zweier Geraden (zweier Winkel 2c.) A und B betrachtet werden soll, bedient man sich der Quotientenform A : B, und liest: „A zu B". A heißt das Vorderglied, B das Hinterglied eines solchen Verhältnisses.

4) Das Verhältniß zweier commensurabler Geraden läßt sich immer durch zwei ganze Zahlen genau darstellen. Dagegen läßt sich das Verhältniß zweier incommensurabler Geraden zwar ebenfalls durch zwei ganze Zahlen darstellen, aber so, daß das Vorderglied vollkommen genau, das Hinterglied aber mit einem Fehler behaftet ist, den man so klein machen kann, als man nur immer will. Es seien X und Y zwei incommensurable Gerade und m sei irgend ein genauer, z. B. der tausendste Theil von X. Mißt man nun Y durch eben diesen Theil m, so wird, da X und Y incommensurabel sind, ein Rest r übrig bleiben, der kleiner ist als m. Angenommen, man habe gefunden, m sei in Y 1460 mal enthalten und lasse den Rest r übrig, so läßt sich also das Verhältniß X : Y in ganzen Zahlen durch 1000 : 1460 ausdrücken, so aber, daß das Vorderglied vollkommen genau, das Hinterglied etwas zu klein ist und zwar um weniger als 1, insofern man m in Beziehung auf X und Y als 1 betrachtet.

Nimmt man statt m ein kleineres Maß, z. B. den tausendsten Theil von m, so ist dieser in X genau 1000000 mal enthalten, bei der Messung von Y aber bleibt ein Rest, der kleiner ist als der tausendste Theil von m, so daß in dem Zahlen-Verhältniß von X : Y, das Hinterglied um $^1/_{1000}$ zu klein ist. Aber es hindert uns nichts einen viel kleineren als den tausendsten Theil von m zur Messung von X und Y anzuwenden, wobei es gar nicht darauf ankommt, ob diese Theilung und Messung wirklich, d. h. auf dem Papiere mittelst der Hand, des Auges und der dazu erforderlichen Instrumente ausgeführt werden kann oder nicht; es handelt sich hier rein um ein Geschäft des Verstandes, das durch die Unvollkommenheit unserer Sinne und Instrumente im Geringsten nicht beschränkt werden kann. Der nach jeder Messung von Y übrig bleibende Rest r kann also kleiner gemacht werden als jede noch so kleine Linie, und somit kann auch der Fehler im Hintergliede des Zahlen-

verhältnisses von $X : Y$ kleiner gemacht werden als jede noch so kleine angebliche Zahl.

Ganz dasselbe läßt sich auch von dem Verhältniß zweier Winkel, zweier Flächenräume ꝛc. sagen.

In dem folgenden §. folgen nun kurz die Hauptsätze der Zahlen-Verhältnisse und -Proportionen.

§. 167.

I.

Das Verhältniß $m : n$ ist entweder eine ganze oder gebrochene Zahl. Bezeichnet überhaupt q den Werth dieser Zahl, so ist $n . q = m$, daher denn auch das Verhältniß $m : n$ ausgedrückt werden kann durch $n . q : n$.

II.

1) Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn sie einem und demselben dritten Verhältnisse gleich sind.

2) Gleiche Zahlen haben zu gleichen Zahlen dasselbe Verhältniß. Ist z. B. $a = b$, so ist $a : c = b : c$; oder wenn $a = b$ und $c = d$, so ist $a : c = b : d$, oder $a : b = c : d$.

3) Sind in zwei gleichen Verhältnissen die Vorderglieder gleich, so sind es auch die Hinterglieder. Ist z. B. $a : b = a : c$, so ist auch $b = c$. Eben so: wenn in zwei gleichen Verhältnissen die Hinterglieder gleich sind, so sind es auch die Vorderglieder. Ist z. B. $a : b = c : b$, so ist auch $a = c$.

4) Ist $a : b = c : d$, und es ist $a \gtrless b$, so ist auch $c \gtrless d$.

III.

Werden zwei Verhältnisse durch die Gleichheitszeichen verbunden, so nennt man einen solchen Ausdruck eine **Proportion**, Verhältnißgleichung. So z. B. $a : b = c : d$. Man liest kurz: a zu b wie c zu d. Die Glieder a und d heißen äußere, b und c mittlere Glieder. Sind in einer Proportion die mittleren Glieder gleich, z. B. $a : b = b : c$, so nennt man eine solche eine **stetige** Proportion.

IV.

In einer Proportion ist das Produkt der mittleren Glieder dem Produkt der äußeren gleich.

Ist $a : b = c : d$, und sowohl $a : b$ als auch $c : d$ gleich q, so ist $b . q : b = d . q : d$ (I); da aber $b . q . d = b . d . q$, so ist auch $a . d = b . c$.

V.

1) Aus zwei gleichen Produkten läßt sich eine Proportion bilden, wenn man die beiden Faktoren des einen Produkts zu äußeren und die beiden Faktoren des andern Produkts zu mittleren Gliedern nimmt.

Ist z. B. $a . d = b . c$, so ist auch $\frac{a . d}{b . d} = \frac{b : c}{b . d}$ woraus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a : b = c : d$ folgt.

2) In einer gegebenen Proportion können die zwei mittleren und ebenso die zwei äußeren Glieder unter sich, und alsdann können auch die äußeren Glieder mit den mittleren verwechselt werden.

Ist z. B. [1]) $a : b = c : d$, und also $a . d = b . c$ (IV),
so ist auch [2]) $a : c = b : d$
[3]) $d : b = c : a$
[4]) $b : a = d : c$.

Die Produkte der äußeren und mittleren Glieder sind hier immer $a . d$ und $b . c$; diese aber sind nach der Voraussetzung gleich, mithin die Proportionen alle richtig (1).

VI.

In einer jeden Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Glieds zum zweiten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Glieds zum vierten.

Ist z. B. $a : b = c : d$,
und setzt man $a : b = q$, mithin auch $c : d = q$, so ist
$b . q : b = d . q : d$ (1)
Nun ist $b . q + b : b = b\ (q + 1) : b = q + 1$,
und $d . q + d : d = d\ (q + 1) : d = q + 1$,
also $b . q + b : b = d . q + d : d$,
d. i. $a + b : b = c + d : d$.

Zusatz. Aus $a + b : b = c + d : d$ folgt auch, daß
$a + b : c + d = b : d$ (V. 2)
d. h. daß die Summe des ersten und zweiten sich zur Summe des dritten und vierten Glieds verhält, wie das zweite zum vierten.

VII.

In einer Proportion verhält sich der Unterschied des ersten und zweiten Glieds zum zweiten, wie der Unterschied des dritten und vierten zum vierten Gliede.

Ist $a : b = c : d$, so verhält sich auch
$a - b : b = c - d : d$.
Kann auf ähnliche Art wie in VI. bewiesen werden.

Zusatz. Aus $a - b : b = c - d : d$, folgt auch
$a - b : c - d = d : b$.

VIII.

Aus der Proportion
$a : b = c : d$
lassen sich auf ähnliche Art wie in VI, noch folgende Proportionen ableiten:
[1]) $a + b : a = c + d : c$

²) $a - b : a = c - d : c$
³) $a + c : b + d = a : b$, woraus sogleich folgt (II, 1):
⁴) $a + c : b + d = c : d$.
Ferner ⁵) $a - c : b - d = a : b$, woraus wieder
⁶) $a - c : b - d = c : d$. Aus (3) und (5) folgt (II, 1)
⁷) $a + c : b + d = a - c : b - d$; und aus (1) und (2), in Verbindung mit V, 2)
⁸) $a + b : c + d = a - b : c - d$.

IX

Sind mehrere Verhältnisse gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ist z. B. $a : b = c : d = e : f = g : h = q$, so ist nach I
$b.q : b = d.q : d = f.q : f = h.q : h$.
Nun ist $b.q + d.q + f.q + h.q : b + d + f + h =$
$(b + d + f + h) q : b + d + f + h = q$;
also auch $(b + d + f + h) q : b + d + f + h = a : b = c : d =$ ꝛc.
oder $a + c + e + g : b + d + f + h = a : b = c : d =$ ꝛc.

Zusatz. 1. Zwei Zahlen verhalten sich wie ihre Gleichvielfachen. Da nämlich $a : b = a : b = a : b =$ ꝛc.
so ist $a + a + a + \ldots : b + b + b + \ldots = a : b$
d. h. $na : nb = a : b$

2) Ist $a : b = c : d$,
so hat man $a : b = ma : mb$
und $c : d = na : nb$

also auch $ma : mb = na : nb$.

X.

Wenn man in zwei Proportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multiplicirt, so erhält man eine neue Proportion.

Ist $a : b = c : d$
und $e : f = g : h$

so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$

also $\frac{a.e}{b.f} = \frac{c.g}{d.h}$

oder $a.e : b.f = c.g : d.h$

Man sagt, diese neue Proportion sei aus den beiden gegebenen zusammengesetzt.

Eben so erhält man aus den drei Proportionen:

$$a:b = c:d,$$
$$e:f = g:h,$$
$$i:k = l:m,$$

die neue: $a.e.i:b.f.k = c.g.l:d.h.m.$

Zusatz 1. Aus $a:b = c:d$
$$a:b = c:d$$
folgt $a^2:b^2 = c^2:d^2$; und ebenso
$a^3:b^3 = c^3:d^3$; u. s. w.

Zusatz 2. Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß wenn man in zwei Proportionen die gleichstelligen Glieder der einen durch die gleichstelligen Glieder der andern dividirt, wieder eine neue Proportion entsteht.

* XI.

Was nun die Anwendung der Zahlen-Verhältnisse und -Proportionen auf Größen-Verhältnisse und -Proportionen betrifft, so dienen hiezu folgende Sätze, in welchen A, B; C, D; u. s. w. durchaus oder paarweise gleichartige Größen, und a, b; c, d; u. s. w. ihre auf einerlei Maß sich beziehenden Maßzahlen vorstellen.

1) Zwei gleichartige Größen verhalten sich wie ihre auf einerlei Maß sich beziehenden Maßzahlen. — Bezeichnet M das gemeinschaftliche Maß, und

ist $A = a.M$, $B = b:M$,
so ist $A:B = a:b$ (I, 3).

2) Sind 4 Größen A, B; C, D durchaus oder paarweise gleichartig und bilden ihre Maßzahlen eine Zahlenproportion, so sind die vier Größen proportionirt oder bilden eine Größenproportion.

Ist $A = a.M$, $B = b.m$, so ist $A:B = a:b$ (1).
Ist ferner $C = c.m$, $D = d.m$, so ist $C:D = c:d$.
Da nun nach der Voraussetzung $a:b = c:d$,
so ist auch $A:B = C:D$.

3) Umgekehrt: sind die vier Größen A, B; C, D proportionirt, so bilden ihre Maßzahlen eine Zahlenproportion. Ist nämlich $A = a:M$, $B = b:M$, so ist $A:B = a:b$ (1); ist ferner $C = c.m$, so ist $D = d.m$, so ist $C:D = c:d$. Ist nun nach der Voraussetzung $A:B = C:D$, so ist auch $a:b = c:d$.

4) Wenn A, B; C, D durchaus oder paarweise gleichartig sind und es ist
$A:B = C:D$, so ist auch
$B:A = D:C$.
denn aus $A:B = C:D$ folgt (3) $a:b = c:d$,
und hieraus $b:a = d:c$ (V, 2, [4]), folglich $B:A = D:C$ (2)

5) Sind A, B; C, D durchaus oder paarweise gleichartig, und es ist
$A:B = C:D$, so ist auch
$r.A:r.B = n.C:n.D$.
Denn weil $A:B = C:D$,
so ist auch $a:b = c:d$ (3)

also $r.a:r.b = n.c:n.d$ (IX Zus. 2);
mithin auch $r.a.M:r.b.M = n.c.m:n.d.m$
oder $r.(aM):r.(bM) = n.(cm):n.(dm)$
d. h. $rA:rB = nC:nD$.

6) Sind A. B; C, D gleichartig und entweder durchaus oder paarweise mit einerlei Maß gemessen und es ist

$A:B = C:D$, so ist auch
$A:C = B:D$.

Denn im ersten Falle hat man $a:b = c:d$;
und da hieraus $a:c = b:d$ (V, 2 [2]),
so ist auch $A:C = B:D$ (2)

Im zweiten Falle sei $A = a.M$, $B = b.M$, $C = c.m$, $D = d.m$; ferner sei $M = r.m$, so ist $A = a.r.m$, $B = b.r.m$.

Da nun $a:b = c:d$,
so ist auch $a.r:b.r = c:d$ (IX, Zus. 2),
und $a.r:c = b.r:d$ (V, 2 [2]);
also auch $A:C = B:D$ (2).

7) Sind die Größen A, B; C, D durchaus oder paarweise gleichartig und ist

$A:B = C:D$,
so ist auch $A + B:B = C + D:D$,
und $A - B:B = C - D:D$.
Denn weil $a:b = c:d$ (3),
so ist auch $a + b:b = c + d:d$
und $a - b:b = c - d:d$ } (VI, VII)
also auch $(a + b)M:bM = (c + d)m:dm$;
und $(a - b)M:bM = (c - d)m:dm$;
oder $aM + bM:bM = cm + dm:dm$
und $aM - bM:bM = cm - dm:dm$,
d. h. $A + B:B = C + D:D$
$A - B:B = C - D:D$.

Ebenso beweist man, daß auch $A + B:A = C + D:C$
und $A - B:A = C - D:C$.

8) Sind die Größen A, B; C, D; E, F; u. s. w. gleichartig, und ist $A:B = C:D = E:F =$ u. s. w., so ist auch $A + C + E + \ldots : B + D + F + \ldots = A:B = C:D =$ 2c.

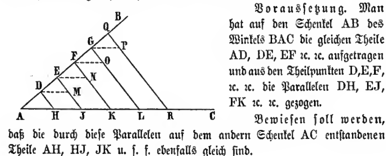
Denn weil $a:b = c:d = e:f$ u. s. w. (3), so ist auch $a + c + e + \ldots : b + d + f + \ldots = a:b = c:d =$ 2c.
Also $(a + c + e + \ldots)M:(b + d + f + \ldots)M = aM:bM = cM:dM =$ 2c.
d. h. $aM + cM + eM + \ldots : bM + dM + fM + \ldots = aM:bM = cM:dM =$ 2c.
oder $A + C + E + \ldots : B + D + F + \ldots = A:B = C:D =$ 2c.

Proportionalität der geraden Linien.

§. 168.

Lehrsatz.

Wenn man auf den Schenkel eines Winkels eine beliebige Anzahl gleicher Theile trägt, hierauf aus den Theilpunkten nach dem andern Schenkel Parallelen zieht, so entstehen auf diesem eben so viele gleiche Theile, wie auf dem ersten.



Voraussetzung. Man hat auf den Schenkel AB des Winkels BAC die gleichen Theile AD, DE, EF ꝛc. ꝛc. aufgetragen und aus den Theilpunkten D, E, F, ꝛc. ꝛc. die Parallelen DH, EJ, FK ꝛc. ꝛc. gezogen.

Bewiesen soll werden, daß die durch diese Parallelen auf dem andern Schenkel AC entstandenen Theile AH, HJ, JK u. s. f. ebenfalls gleich sind.

Beweis.

Durch die Theilpunkte D, E, F ꝛc. ꝛc. ziehe man mit AC die Parallelen DM, EN, FO ꝛc. ꝛc., so entstehen dadurch die Dreiecke AHD, DME, ENF, FOG, welche alle congruent sind. (§. 42). Deßwegen aber ist AH = DM = EN = FO ꝛc. ꝛc. Da aber DM = HJ, EN = JK, FO = KL (§. 73), so ist auch AH = HJ = JK = KL ꝛc.

§. 169.

Zusätze.

1) Die Parallelen DH, EJ, FK ꝛc. ꝛc. wachsen in dem nämlichen Verhältniß, wie die ganzen Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. ꝛc.

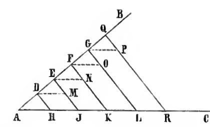
Denn wegen der Congruenz der Dreiecke ist DH = EM = FN = GO ꝛc. ꝛc. und wegen §. 73 ist MJ = DH,

also EJ = 2 DH; und weil auch EJ = NK ist,

so ist ferner FK = EJ + FN = 3 DH;

ebenso ist GL = FK + GO = 4 DH u. s. f.

Ist also DH = 1, so ist EJ = 2, FK = 3, GL = 4.



2) Da AG = 4 AD, und AL = 4 AH,
so ist AG : AD = 4 : 1
und AL : AH = 4 : 1,

also [1]) AG : AD = AL : AH (§. 167 XI. 2).
Ebenso weil AG = 4 AD und AE = 2 AD,
und weil AL = 4 AH und AJ = 2 AH,
so ist AG : AE = 4 : 2
und AL : AJ = 4 : 2

also [2]) AG : AE = AL : AJ. Ebenso beweist man, daß
[3]) AG : FA = AL : AK.

Verwechselt man in den Proportionen [1]) [2]) [3]) die mittleren Glieder, so erhält man (§. 167, XI, 6)

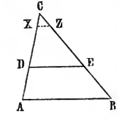
AG : AL = AD : AH
AG : AL = AE : AJ.
AG : AL = AF : AK.

Diese Proportionen lehren, daß irgend zwei zusammen gehörige Schenkel-Abschnitte AG und AL das nämliche Verhältniß zu einander haben, wie irgend zwei andere zusammen gehörige Schenkel-Abschnitte AD und AH, oder AE und AJ ꝛc. ꝛc.

3) Jede der zwei Parallelen verhalten sich zu einander wie die dazu gehörigen Schenkel-Abschnitte, von der Spitze des Winkels an gerechnet.

Denn weil z. B. EJ : FK = 2 : 3
und auch AE : AF = 2 : 3,

so ist EJ : FK = AE : AF. (§. 167, XI, 2)
Ebenso beweist man, daß FK : GL = AF : AG ꝛc.

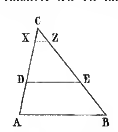


4) Sind XZ, DE und AB parallel und ist CX in CA genau m mal enthalten, so ist auch CZ in CB genau m mal enthalten; und ist CX in CD genau n mal enthalten, so ist auch CZ in CE genau n mal enthalten.

§. 170.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck mit einer der drei Seiten eine Parallele zieht so werden dadurch die beiden andern Seiten des Dreiecks proportionirt durchschnitten, d. h. es verhalten sich die beiden ganzen durchschnittenen Seiten zu einander a) wie die obern (an der Spitze liegenden) oder b) wie die untern Abschnitte; auch haben c) die obern Abschnitte das nämliche Verhältniß zu einander wie die untern.



Voraussetzung. In dem Dreieck ABC ist DE parallel mit der Seite AB gezogen.

Bewiesen soll werden, daß

a) CA : CB = CD : CE

und b) CA : CB = DA : EB

und c) CD : CE = DA : EB

Beweis.

Es sei die Gerade CX, in CA und CD ohne Rest, und zwar in CA z. B. achtmal und in CD fünfmal enthalten sei. Zieht man nun XZ, parallel mit AB oder DE, so wird CZ in CB ebenfalls acht- und in CE fünfmal ohne Rest enthalten sein (§. 169. 4.). Es ist also

CA : CD = 8 : 5
und CB : CE = 8 : 5

also CA : CD = CB : CE, oder wenn man die mittleren Glieder verwechselt:

a) CA : CB = CD : CE, d. h. die ganzen Seiten AC und CB verhalten sich wie die obern Abschnitte.

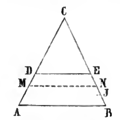
Ebenso weil CA : DA = 8 : 3
und CB : EB = 8 : 3,

so ist auch CA : DA = CB : EB,
oder b) CA : CB = DA : EB, d. h. die ganzen Seiten CA und CB verhalten sich wie die untern Abschnitte DA und EB.

Endlich da CD : DA = 5 : 3
und CE : EB = 5 : 3

so ist auch CD : DA = CE : EB
oder c) CD : CE = DA : EB, d. h. die obern Abschnitte verhalten sich wie die untern.

Anmerkung. Man hat bei diesem Beweise angenommen, CA und CD haben ein gemeinschaftliches Maß CX oder seien commensurabel. Für den Fall nun, da CA und CD incommensurabel sind, gilt der Lehrsatz ebenfalls, unter Berücksichtigung dessen, was im §. 166, Nro. 4 gesagt worden. Doch läßt sich der Beweis auch auf folgende Art ausführen.



Angenommen, die Proportion $CA : CB = CD : CE$ sei, für den Fall, da CA und CD incommensurabel sind, unrichtig, und es verhalte sich $CA : CB = CD : CJ$, wo CJ größer als CE.

Man denke sich nun die Gerade CA in so viele gleiche Theile getheilt, daß wenn man aus allen Theilpunkten derselben Parallelen mit AB oder DE gegen CB hinzieht, wenigstens eine dieser Parallelen MN die Gerade CB zwischen E und J treffe.

Nach dem Vorhergehenden erhält man nun, wegen der Commensurabilität der Geraden CA und CM, die Proportion

$CA : CB = CM : CN$; und da nach der Annahme auch
$CA : CB = CD : CJ$,

so ist $CM : CN = CD : CJ$,
oder $CM : CD = CN : CJ$,

welche Proportion unrichtig ist, da CD kleiner als CM, CJ hingegen größer als CN ist (§. 167, II, 4). Man wird aber auf diese Unrichtigkeit immer kommen, wenn man in der Proportion $CA : CB = CD : CJ$ das letzte Glied CJ größer nimmt als CE und dann so fortfährt, wie oben; CJ kann also nicht größer sein als CE.

Auf dem nämlichen Wege aber läßt sich auch beweisen, daß CJ nicht kleiner genommen werden dürfe als CE.

Die Proportion $CA : CB = CD : CE$ ist also richtig auch für den Fall, da CA und CD incommensurabel sind.

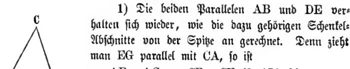
Aus $CA : CB = CD : CE$
oder a) $CA : CD = CB : CE$ (§. 167, XI, 6)
folgt: $CA - CD : CA = CB - CE : CE$ (§. 167, XI, 7)
oder $DA : CA = EB : CB$
oder b) $CA : DA = CB : EB$
aus a) und b) aber folgt (nach §. 167, XI, 6)
c) $CD : DA = CE : EB$.

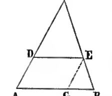
Die drei Proportionen (a), (b) und (c) lassen sich durch Verwechslung der mittleren Glieder auch so darstellen

a) $CA : CB = CD : CE$
b) $CA : CB = DA : EB$
c) $CD : CE = DA : EB$.

§. 171.

Zusätze.





1) Die beiden Parallelen AB und DE verhalten sich wieder, wie die dazu gehörigen Schenkel-Abschnitte von der Spitze an gerechnet. Denn zieht man EG parallel mit CA, so ist

AB : AG = CB : CE (§. 170. b),

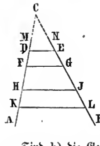
oder weil AG = DE (§. 73) so kann man setzen:

AB : DE = CB : CE, und da auch

CA : CD = CB : CE (§. 170, a.), so ist auch

AB : DE = CA : CD.

Ist also z. B. CD die Hälfte, der dritte, der vierte u. s. w. Theil von CA, so ist auch DE die Hälfte, der dritte, vierte u. s. w. Theil von AB.



* 2) Wenn man zwischen zwei Geraden eine beliebige Anzahl Parallelen zieht, so werden die beiden Geraden dadurch in proportionale Theile geschnitten.

Denn es seien a) die beiden Geraden MA und NB parallel, so sind die Stücke DF und EG, FH und GJ, HK und JL, welche durch die Parallelen DE, FG 2c. 2c. von beiden Geraden abgeschnitten werden, gleich (§. 73), mithin DF : EG = FH : GJ = HK : JL 2c. 2c. (§. 167, II. 2).

Sind b) die Geraden MA und NB nicht parallel, so verlängere man sie, bis sie sich in C schneiden; nun ist im Dreieck CFG

CF : CG = DF : EG (§. 170. b); und im Dreieck CHJ

CF : CG = FH : GJ (§. 170. c),

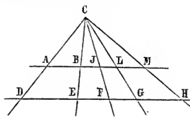
also I. DF : EG = FH : GJ. Ferner ist im Dreieck CHJ

CH : CJ = FH : GJ, und im Dreieck CKL

CH : CJ = HK : JL

mithin II. FH : GJ = HK : JL;

Aus I. und II. folgt aber DF : EG = FH : GJ = HK : JL.



3) Mehrere gerade Linien CD, CE, CF 2c. 2c., welche von einem Punkt C auslaufen, werden von zwei Parallelen AM und DH proportionirt geschnitten und schneiden auch diese Parallelen in proportionirte Theile.

Daß CA : AD = CB : BE = CJ : JF 2c. 2c., folgt aus §. 170 c; da ferner

	CB : CE = AB : DE (§. 171. 1)
und	CB : CE = BJ : EF
so ist I.	AB : DE = BJ : EF;
ferner da	CJ : CF = BJ : EF
und	CJ : CF = JL : FG
so ist II.	BJ : EF = JL : FG
und weil	CL : CG = JL : FG
und	CL : CG = LM : GH
so ist III.	JL : FG = LM : GH.

Aus I. II. und III. aber folgt, daß AB : DE = BJ : EF = JL : FG = LM : GH.

§. 172.

Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks von einer Geraden proportionirt geschnitten werden, so ist diese mit der dritten Seite des Dreiecks parallel.

A H G F B C

Voraussetzung. Die beiden Seiten AB und AC des Dreiecks ABC werden von der Geraden HG so geschnitten, daß

AB : AC = AH : AG,

also auch AB : AC = HB : GC,

oder AH : AG = HB : GC ist.

Bewiesen soll werden, daß HG parallel ist mit BC. (Da, wenn eine der vorausgesetzten Proportionen stattfindet, auch zugleich die beiden andern richtig sind (§. 170), so braucht man den Beweis blos für eine derselben, z. B. für AB : AC = AH : AG zu führen.)

Beweis.

Angenommen, HG sei nicht zu BC parallel, sondern eine andere durch H gezogene Gerade HF.

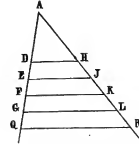
Nun wäre also

	AB : AC = AH : AF (§. 170. a):
Da aber auch	AB : AC = AH ; AG (V.)
so wäre auch	AH : AF = AH : AG,
mithin	AF = AG (§. 167, II, 2).

Ist aber AF = AG, so fällt der Punkt F mit G, und also die zu BC parallel angenommene Linie HF mit HG zusammen. Die Gerade HG ist also parallel mit BC.

* §. 172. a.

Zusätze.



1) Wenn die Schenkel eines Winkels durch mehrere Gerade proportionirt geschnitten werden, so sind diese Geraden parallel.

Wenn zwei, in Einer Ebene liegende Gerade DQ und HR in gleiche Theile getheilt sind, und es sind die Verbindungs-Linien DH und EJ zweier einander entsprechender Theilpunkte einander parallel, so sind auch die Verbindungs-Linien der übrigen gleichzähligen Theilpunkte parallel.

Denn verlängert man DQ und HR bis zu ihrem Durchschnitt in A, so hat man

$$AJ : HJ = AE : DE \text{ (§. 170)},$$

also auch $AJ + HJ : AJ = AE + DE : AE$ (§. 167, XI, 7)

oder auch $AJ + JK : AJ = AE + EF : AE$,

d. i. $AK : AJ = AF : AE$,

woraus folgt, daß EJ und FK parallel sind (§. 172) u. s. w.

2) Der Satz gilt auch, wenn DH und EJ nicht in gleiche, sondern in proportionirte Theile getheilt sind, wie sich leicht erweisen läßt.

* §. 173.

Lehrsatz.

Wenn man einen der drei Winkel eines Dreiecks durch eine gerade Linie halbirt, so wird durch eben diese Gerade die Gegenseite jenes Winkels in zwei Theile getheilt, welche mit denjenigen Seiten des Dreiecks, die den Winkel einschließen, in Proportion stehen.

Voraussetzung. Der Winkel ACB wird durch die Gerade CD halbirt.

Bewiesen soll werden, daß die beiden Theile AD und BD, in welche die Seite AB durch die Gerade CD getheilt wird, mit den Seiten AC und BC, welche den Winkel ACB einschließen, in Proportion stehen; d. h. daß AD : DB = AC : BC.

Beweis.

Man ziehe durch A mit DC die Parallele AF, welche die verlängerte BC in F schneidet.

F C B D A

Es ist also AD : DB = FC : BC (§. 170. c)
Da aber Winkel FAC = W. ACD (§. 31. a)
und W. ACD = W. BCD (V.)
und W. BCD = W. AFC (§. 31),

so ist auch W. FAC = W. AFC
und mithin FC = AC (§. 44).

In obiger Proportion läßt sich daher AC statt FC setzen, wodurch man erhält

AD : DB = AC : BC

* §. 174.

Lehrsatz.

Wenn man irgend eine Seite eines Dreiecks in zwei solche Theile theilt, daß diese mit den beiden andern Seiten des Dreiecks in Proportion stehen, so wird der Gegenwinkel der getheilten Seite durch eine aus dem Theilungs-Punkt nach seiner Spitze gezogene Gerade halbirt.

Voraussetzung. (S. Figur zu §. 173). Die Gerade AB ist in D so getheilt, daß AD : BD = AC : BC.

Bewiesen soll werden, daß die Gerade DC den Winkel ACB halbirt.

Beweis.

Man verlängere BC, mache die Verlängerung CF = AC, und ziehe AF.
Da nun AD : BD = AC ; BC (V.).
und AC = CF (Constr.),
so ist auch AD : BD = CF : BC;
mithin ist AF mit DC parallel (§. 172).
Daraus aber folgt, daß W. ACD = W. FAC (§. 31. a).
Da aber auch W. FAC = W. AFC (§. 43)
und W. AFC = W. BCD (§. 31),

so muß auch W. ACD = W. BCD sein.

Der Winkel ACB wird also durch die Gerade DC halbirt.

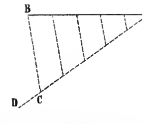
Anmerkung. Siehe den Anhang zum fünften Abschnitte Nr. 1.

Geometrische Auflösung einiger Aufgaben, die sich auf §§. 168—174 beziehen.

§. 175.

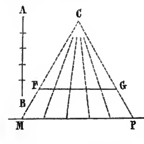
Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.



Es sei AB die gegebene gerade Linie, welche z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll.

Erste Auflösung. Man trage an den Punkt A den Schenkel AD unter einem beliebigen Winkel. Hierauf trage man auf AD fünf gleiche Theile von beliebiger Größe, verbinde den letzten Theilpunkt C mit dem Endpunkt B der Linie AB, und ziehe aus den übrigen Theilpunkten des Schenkels AD Parallelen mit CB, so wird dadurch die Linie AB in fünf gleiche Theile getheilt (§. 168).



Zweite Auflösung. Auf einer beliebig großen Linie MN trage man fünf gleiche Theile von beliebiger Größe auf. Alsdann beschreibe man über dem Theil von MN, welcher diese fünf gleiche Theile in sich faßt, nämlich über MP, ein gleichseitiges Dreieck MPC.

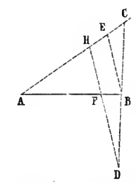
Hierauf mache man das Stück CF gleich der gegebenen Linie AB und ziehe FG parallel mit MP.

Da nun CM : MP = CF : FG (§. 171. 1),

so ist, weil CM = MP (Constr.), auch CF = FG = AB.

Zieht man nun aus C nach den Theilpunkten der Linie MP gerade Linien, so wird dadurch die Linie FG in fünf gleiche Theile getheilt. Da nun AB gleich FG ist, so wird der fünfte Theil von FG sich auch auf AB fünfmal auftragen lassen, und es wird dadurch AB in fünf gleiche Theile getheilt.

Dritte Auflösung. Man trage an den Punkt A der gegebenen Geraden AB den Schenkel AC unter einem beliebigen Winkel. Hierauf trage man auf AC sechs gleiche Theile von beliebiger Größe (also wenn AB in



m gleiche Theile getheilt werden sollte, so müßten m + 1 gleiche Theile auf den Schenkel AC getragen werden). Aus dem letzten Theilpunkte C ziehe man CB, verlängere diese, und mache die Verlängerung BD = CB.

Zieht man nun aus D nach dem vierten (m — 1 sten) Theilpunkt der Geraden AC, von A aus gezählt, die Gerade DH, so wird durch diese von der Geraden AB ein Stück FB abgeschnitten, welches genau der fünfte (mte) Theil von AB sein wird.

Denn da HE = EC und DB = BC (Constr.), so ist, wenn man EB zieht, HE : EC = DB : BC (§. 167, II, 2). Deßwegen aber ist EB parallel mit HD (§. 172).

Man hat also in dem Dreieck ABE

AE : HE = AB : FB (§. 170. b).

Da nun HE der fünfte Theil von AE ist, so muß auch FB der fünfte Theil von AB sein.

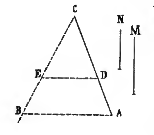
§. 176.

Aufgabe.

B
D
C
A

Eine Gerade AB soll so getheilt werden, daß ihre Theile in einem bestimmten Verhältniß stehen; daß sie sich z. B. verhalten, wie die Zahlen 2, 3 und 5.

Auflösung. Man theile die Gerade AB nach der Anleitung des vorigen §. in 2 + 3 + 5, d. h. in zehn gleiche Theile; so wird in den Punkten C und D die Gerade AB auf die verlangte Art getheilt, weil AC zwei, CD drei und DB fünf dieser gleichen Theile enthält.



§. 176. a.

Aufgabe.

Eine gerade Linie AC soll so getheilt werden, daß ihre Theile sich verhalten wie zwei gegebene Linien M und N.

Auflösung. Man trage an C den Schenkel CB unter einem beliebigen Winkel. Auf diesem Schenkel nehme man CE = M,

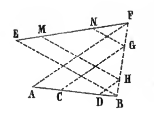
und EB = N, ziehe BA und mit dieser ED parallel, so hat man CD : DA = CE : EB = M : N.

Auf ähnliche Art würde man verfahren, wenn AC so in drei Theile getheilt werden sollte, daß die Theile sich verhielten wie drei gegebene Geraden u. s. w.

* §. 176. b.

Aufgabe.

Eine begrenzte gerade Linie EF soll in demselben Verhältniß getheilt werden, wie eine andere Gerade AB, deren Theilpunkte C und D sind, und die mit ersterer in einer Ebene liegt.



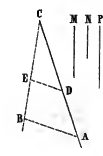
Auflösung. Man ziehe BF, AF und BE; hierauf aus C und D mit AF die Parallelen CG, DH, und endlich aus G und H mit BE die Parallelen HM und GN, so ist EF in M und N nach demselben Verhältniß getheilt, wie AB in C und D.

Der Beweis ist leicht.

§. 177.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien M, N und P die vierte Proportional-Linie zu finden.



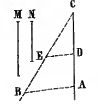
Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Winkel ACB, mache CE = M, EB = N und CD = P. Hierauf ziehe man ED und mit dieser aus B die Parallele BA, so ist DA die gesuchte vierte Proportionale.

Oder man mache CE = M, CD = N und EB = P, so erhält man, wenn man wie vorhin verfährt, DA für die gesuchte vierte Proportionale.

§. 178.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Geraden M und N die dritte Proportional-Linie zu finden.

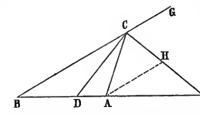


Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Winkel BCA, mache CE = M, EB = N und CD ebenfalls = N. Zieht man nun ED, und mit dieser aus B die Parallele BA, so ist DA die gesuchte dritte Proportionale: Denn es ist CE : EB = CD : DA,

d. i. M : N = N : P.

Anhang zum fünften Abschnitt.

1. Der Lehrsatz §. 173 gilt auch noch, wenn statt des W. ACB der Außenwinkel ACG halbirt wird. Aber die Halbirende CD′ trifft alsdann die Gegenseite AB außerhalb des Dreiecks (wenn anders dieses nicht gleichschenklig ist, in welchem Falle die Halbirende parallel mit der Gegenseite ist und sie also gar nicht trifft). Zieht man nun AH parallel mit BC, so ist BD′ : AD′ = BC : AH. Aber da, wegen der Parallelen, W. AHC = W. GCH und W. GCH = W. ACH (V.), so ist auch W. AHC = W. ACH, mithin AC = AH und folglich BD′ : AD′ = BC : AC. — Man kann nun den Lehrsatz, §. 173, folgenderweise allgemeiner ausdrücken: Wenn man einen innern oder äußern Winkel eines Dreiecks durch eine Gerade halbirt, welche, hinreichend verlängert, die Gegenseite oder deren Verlängerung in einem Punkte trifft, so werden durch diesen Punkt zwei Abschnitte der Gegenseite bestimmt, welche mit den anliegenden Seiten in Proportion stehen.



Die Umkehrung dieses Satzes erhält nun auch eine allgemeinere Fassung als in §. 174, nämlich folgende: Wenn man auf irgend einer Seite eines Dreiecks oder auf ihrer Verlängerung einen Punkt so bestimmt, daß seine Entfernungen von den Endpunkten dieser Seite mit den beiden andern Seiten des Dreiecks in Proportion stehen, so wird, im ersten Falle, der Gegenwinkel jener ersten Seite, im andern Falle sein Nebenwinkel durch eine aus dem fraglichen Punkte nach seiner Spitze gezogene Gerade halbirt. Den Beweis für den ersten Fall liefert §. 174; für den zweiten Fall lautet er wie folgt: Ist D′ der fragliche Punkt der Verlängerung von AB, so ziehe man D′C, und mit BC die Parallele AH. Nun ist BD′ : AD′ = BC : AC (V.), und, wegen der Parallelen, BD′ : AD′ = BC : AH; mithin AC = AH. Es ist also auch W. ACH = W. AHC; und da W. AHC = W. GCH (§. 31, a), so ist auch W. ACH = W. GCH, d. h. der Außenwinkel GCA ist durch D′C halbirt.

Zusatz. Aus den beiden Proportionen BD : AD = BC : AC und BD′ : AD′ = BC : AC, folgt, daß BD : AD = BD′ : AD′. Die Entfernungen des Punktes D von den Endpunkten der Geraden AB sind also den Entfernungen des Punktes D′ von den Endpunkten derselben Geraden proportionirt. Man sagt in diesem Falle, die Gerade AB werde durch D in Beziehung auf D′ harmonisch getheilt. Da aus obiger Proportion auch folgt, daß AD : AD′ = BD : BD′, so wird also auch DD′ durch A in Beziehung auf B harmonisch getheilt. Ueber die harmonische Proportion vergleiche Anhang II. am Schlusse des Buchs.

A C E F D G B

2. Aufgabe. Zu zwei Geraden das gemeinschaftliche Maß zu finden.

Auflösung. AB und CD seien die beiden Geraden. Man trage die kleinere CD auf AB ab, so oft es geht; man erhält

1) $AB = CD + EB$.

Trage den Rest EB auf CD ab, man erhält

2) $CD = EB + FD$.

Trage den Rest FD auf EB ab, man erhält

3) $EB = FD + GB$.

Endlich trage man GB auf FD ab; es läßt sich 3 mal ohne Rest auftragen, man hat deßhalb

4) $FD = 3\,GB$ und es ist GB das gemeinschaftliche Maß von AB und CD.

Beweis. Setzt man in Gleichung 3) den in 4) für FD gefundenen Werth, so ist

5) $EB = 3\,GB + GB = 4\,GB$.

Setzt man diesen Werth und den aus Gl. 4) in Gl. 2), so ist

6) $CD = 4\,GB + 3\,GB = 7\,GB$.

Setzt man endlich den in Gl. 5) und 6) gefundenen Werth in Gl. 1), so erhält man

7) $AB = 7\,GB + 4\,GB = 11\,GB$.

GB ist nach der letzten Gl. in AB 11 mal und nach der vorhergehenden 7 mal in CD enthalten und somit das gemeinschaftliche Maß von AB und CD.

Zusatz 1. Die Maßzahl von AB ist 11 und die von CD 7, deßhalb verhält sich $AB : CD$ wie $11 : 7$.

Bemerkung. In ähnlicher Weise wird das gemeinschaftliche Maß zweier Bögen von gleichem Halbmesser und mit Anwendung dieser Auflösung auch das gemeinschaftliche Maß zweier Winkel gefunden.

Sechster Abschnitt.

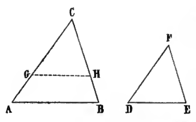
Von der Aehnlichkeit der ebenen Figuren.

A. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 179.

Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel eines Dreiecks beziehungsweise so groß sind, als zwei Winkel eines andern, so sind die homologen Seiten proportionirt, d. h. je zwei homologe Seiten in beiden Dreiecken haben einerlei Verhältniß.



Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF ist W. CAB = W. FDE und W. ABC = W. DEF; also auch W. ACB = W. DFE (§. 39. 5).

Bewiesen soll werden, daß CA : FD = CB : FE = AB : DE.

Beweis.

Man mache CG = FD, CH = FE und ziehe GH, so sind die Dreiecke CGH und DEF congruent (§. 41).

mithin also W. FDE = W. CGH;
Da aber auch W. FDE = W. CAB (V.)

so ist auch W. CGH = W. CAB;

also ist GH mit AB parallel (§. 30) und daher

$$CA : \left.\begin{matrix}CG\\ \text{oder } FD\end{matrix}\right\} = CB : \left.\begin{matrix}CH\\ FE\end{matrix}\right\} = AB : \left.\begin{matrix}GH\\ DE\end{matrix}\right\} \quad (\text{§. 170 u. §. 171. 1}).$$

Die Verhältnisse der homologen Seiten in beiden Dreiecken sind also gleich, d. h. die gleichliegenden Seiten sind proportionirt.

Anmerkung. Gleichliegende, homologe Seiten nennt man diejenigen, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen. So sind z. B. AB und DE gleichliegende Seiten, weil sie den gleichen Winkeln C und F gegenüber stehen.

§. 180.

Erklärung.

Zwei Dreiecke heißen **ähnlich**, wenn ihre Winkel beziehungsweise gleich, und ihre homologen Seiten proportionirt sind. — Die beiden Dreiecke des vorigen §. sind also ähnlich.

§. 181.

Zusätze.

1) Zwei Dreiecke, die einem dritten ähnlich sind, sind unter sich ähnlich.

2) Zwei Dreiecke, die congruent sind, sind auch ähnlich. **Congruenz** ist also **Aehnlichkeit** und Gleichheit.

§. 182.

Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit zwei Seiten eines andern Dreiecks in Proportion stehen, die Winkel aber, welche

von diesen Seiten in beiden Dreiecken eingeschlossen werden, gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Voraussetzung. (S. die nächste Figur.) In den beiden Dreiecken ABC und DEF ist AC : DF = BC : EF
und Winkel ACB = W. DFE.

Bewiesen soll werden, daß auch Winkel CAB = Winkel FDE, d. h. daß die Dreiecke ähnlich sind.

Beweis.

Man mache wieder GC = DF und HC = EF, und ziehe GH, so sind die Dreiecke GCH und DEF congruent (§. 41).

Nun ist nach der Voraussetzung

AC : DF = BC : EF,

also auch AC : GC = BC : HC (Constr.);

mithin GH mit AB parallel (§. 172); daraus aber folgt, daß W. CGH = W. CAB (§. 31);

und da W. CGH = W. FDE, wegen der Congruenz der Dreiecke GCH und DEF,

so ist auch W. CAB = W. FDE.

Die Dreiecke sind also ähnlich nach §§. 179, 180.

§. 183.

Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen Dreiecks mit den drei Seiten des andern Dreiecks proportionirt sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF ist AC : DF = BC : EF = AB : DE.

Bewiesen soll werden, daß die Winkel des Dreiecks ACB einzeln den Winkeln des Dreiecks DEF gleich, d. h. daß diese Dreiecke ähnlich sind.

Beweis.

Man mache abermals GC = DF, HC = EF und ziehe GH.

Da nun AC : DF = BC : EF (V.), so ist auch

AC : GC = BC : HC (Constr.);

mithin GH mit AB parallel (§. 172);

daraus folgt aber BC : HC = AB : GH (§. 171. 1);
nun ist auch BC : EF = AB : DE (V.); und da HC = EF,
so ist AB : GH = AB : DE,
mithin GH = DE.

Die Dreiecke GHC und DEF sind also congruent; folglich ist der Winkel ACB = DFE.

Ferner ist wegen der Congruenz dieser Dreiecke
W. CGH = FDE;
da aber auch W. CGH = CAB (§. 31.)
so ist auch W. CAB = FDE;
mithin sind die Dreiecke ABC und DEF ähnlich (§§. 179, 180).

§. 184.

Lehrsatz.

(1) Wenn zwei Seiten eines Dreiecks mit zwei Seiten eines andern Dreiecks proportionirt sind, und die Gegenwinkel der größern dieser proportionirten Seiten gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Voraussetzung. (S. die vorige Figur.) In den beiden Dreiecken ABC und DEF sei AC : DF = BC : EF; AC und DF seien die größern Seiten und ihre Gegenwinkel ABC und DEF gleich.

Bewiesen soll werden, daß auch die übrigen gleichliegenden Winkel dieser beiden Dreiecke gleich, d. h. daß beide Dreiecke ähnlich sind.

Beweis.

Man mache wieder GC = DF und HC = EF, und ziehe GH.
Da nun AC : DF = BC : EF (V.),
so ist auch AC : GC = BC : HC (C.);
mithin ist GH mit AB parallel (§. 172), und GC > HC.
Es ist also auch W. CGH = W. CAB (§. 31).
Da aber auch W. DEF = W. ABC (V.),
so ist W. CGH = W. FDE.

Die Dreiecke GHC und DEF sind also congruent (§. 54),
mithin W. ACB = W. DFE; also sind die Dreiecke ABC und DEF ähnlich (§§. 179, 180).

* §. 185.

Zusätze.

1) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen beziehungsweise parallel sind mit den drei Seiten des andern Dreiecks (§. 33 und §. 179).

(1) — Si noti e si confrontino i corollari del §. 187.

2) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des ersten Dreiecks oder ihre Verlängerungen auf den Seiten des zweiten Dreiecks oder deren Verlängerungen senkrecht stehen (§. 39, 8, 9).

§. 186.

Zusätze.

1) Zwei gleichseitige Dreiecke sind einander ähnlich.

2) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ein gleichliegender Winkel in beiden gleich ist.

§. 187.

Zusätze.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich,

1) Wenn ein spitzer Winkel im einen Dreieck so groß ist als ein spitzer Winkel im andern Dreieck (§. 179).

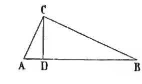
2) Wenn die Katheten des einen Dreiecks den Katheten des andern Dreiecks proportionirt sind (§. 182).

3) Wenn die Hypotenuse und eine Kathete im einen Dreieck proportionirt sind mit der Hypotenuse und einer Kathete im andern Dreieck (§. 184).

§. 188.

Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fällt, so wird das Dreieck dadurch in zwei kleinere getheilt, welche a) dem ganzen und b) unter sich ähnlich sind.



Voraussetzung. Man hat in dem rechtwinkligen Dreieck ABC aus der Spitze C des rechten Winkels das Loth CD auf der Hypotenuse AB gefällt.

Bewiesen soll werden, daß die beiden Dreiecke ADC und BDC dem ganzen Dreieck und unter sich ähnlich sind.

Beweis.

a) Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADC und ABC sind ähnlich, weil sie den Winkel A, — und die beiden rechtwinkligen Dreiecke BDC und ABC, weil sie den Winkel B gemein haben (§. 187, 1).

b) Da die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADC und BDC dem Dreieck ABC ähnlich sind, so sind sie auch unter sich ähnlich (§. 181, 1).

§. 189.

Zusätze.

1) Aus der Aehnlichkeit der zwei Dreiecke ADC und ABC folgt die Proportion AD : AC = AC : AB (denn AD im Dreieck ADC und AC im Dreieck ABC sind homolog, weil sie den gleichen Winkeln ACD und ABC gegenüber liegen; und AC im Dreieck ADC und AB im Dreieck ABC sind homolog, weil sie den gleichen Winkeln ADC und ACB gegenüber liegen.) Ebenso ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und BDC:

BD : BC = BC : AB

Es ist also jede der beiden Katheten die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem Abschnitt derselben, der an der Kathete liegt.

2) Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ADC und CDB ergibt sich die Proportion

AD : DC = DC : BD

(denn die Seiten AD im Dreieck ADC und DC im Dreieck BDC, sind homolog, weil sie den gleichen Winkeln ACD und CBD gegenüber liegen; ebenso sind DC im Dreieck ADC und BD im Dreieck BDC homolog, weil sie den gleichen Winkeln BCD und CAD gegenüberliegen.) Das Loth CD, welches man aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt hat, ist also die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

B. Aehnlichkeit mehrseitiger Figuren.

§. 190.

Lehrsatz.

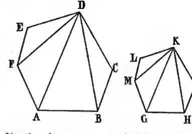
Wenn zwei Vielecke aus ähnlichen Dreiecken auf einerlei Art zusammengesetzt sind, so sind ihre Winkel beziehungsweise gleich und ihre homologen Seiten proportionirt. (Homolog heißen hier diejenigen Seiten, welche zwischen je zwei gleichen Winkeln beider Vielecke liegen.)

Voraussetzung. In den beiden Vielecken ABCDEF und GHJKLM sind die Dreiecke DEF und KLM, DFA und KMG, DAB und KGH, DBC und KHJ einander ähnlich, und auf einerlei Art zusammengesetzt.

Bewiesen soll werden, daß W. DEF = W. KLM, W. EFA = W. LMG u. s. w.; ferner daß DE : KL = EF : LM = FA : MG = u. s. w.

Beweis.

Da die Dreiecke DEF und KLM ähnlich sind, so sind die beiden Winkel DEF und KLM einander gleich. Aus eben dieser Ursache ich auch Winkel EFD = W. LMK.



Da aber die Dreiecke DFA und KMG ebenfalls ähnlich sind, so ist auch W. DFA = W. KMG Es ist also auch der aus den Winkeln EFD und DFA gebildete W. EFA im ersten Vieleck gleich dem aus den Winkeln LMK und KMG gebildeten Winkel LMG im andern Vieleck. Auf eben diese Art beweist man auch die Gleichheit der Winkel FAB und MGH, ABC und GHJ ꝛc. ꝛc.

Die Winkel beider Vielecke sind also beziehungsweise gleich.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFE und KLM ist ferner

1) DE : KL = EF : LM.

Aus dem nämlichen Grunde ist auch:

EF : LM = FD : MK, und da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFA und KMG:

FD : MK = FA : MG,

so ist 2) EF : LM = FA : MG. Ferner da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFA und KMG auch

FA : MG = AD : GK, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DAB und KGH,

AD : GK = AB : GH,

so ist auch 3) FA : MG = AB : GH.

Ebenso beweist man auch, daß

4) AB : GH = BC : HJ

und 5) BC : HJ = CD : JK.

Aus Nr. 1, 2, 3, 4, 5 aber folgt

DE : KL = EF : LM = FA : MG = AB : GH = BC : HJ = CD : JK.

Die homologen Seiten der Vielecke sind also proportionirt.

§. 190. a.

Erklärung.

Die Erklärung in §. 180 kann jetzt auch auf Vielecke ausgedehnt werden, d. h.: Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn ihre Winkel beziehungsweise gleich und ihre homologen Seiten proportionirt sind.

§. 191.

Lehrsatz.

Wenn man in zwei ähnlichen Vielecken aus zwei homologen Winkelspitzen Diagonalen nach den übrigen Winkelspitzen zieht, so sind die dadurch entstehenden Dreiecke beziehungsweise einander ähnlich.

Voraussetzung. (S. die vorige Figur.) Die beiden Vielecke ABCDEF und GHJKLM sind ähnlich, d. h. Winkel FAB = W. MGH, W. ABC = W. GHJ, W. BCD = W. HJK ꝛc. ꝛc. und AB : GH = BC : HJ = CD : JK ꝛc. ꝛc.

Man hat aus den beiden homologen Winkelspitzen D und K Diagonalen nach den übrigen Winkelspitzen gezogen.

Bewiesen soll werden, daß die dadurch entstehenden Dreiecke DEF und KLM, DFA und KMG, DAB und KGH, DBC und KHJ beziehungsweise einander ähnlich sind.

Da DE : KL = EF : LM, und W. DEF = W. KLM (V.), so sind die Dreiecke DEF und KLM einander ähnlich (§. 182).

Es ist also auch

EF : LM = FD : MK;

da aber auch EF : LM = FA : MG (V.),

so ist FD : MK = FA : MG.

Da ferner wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DEF und KLM auch Winkel EFD = W. LMK, so ist auch W. EFA — W. EFD = W. LMG — W. LMK, d. h. W. DFA = W. KMG.

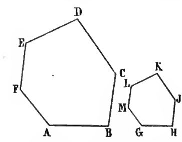
Es sind also auch die beiden Dreiecke DFA und KMG ähnlich (§. 182). Ebenso beweist man die Aehnlichkeit der übrigen Dreiecke.

Die beiden ähnlichen Vielecke ABCDEF und GHJKLM sind also aus ähnlichen Dreiecken auf einerlei Art zusammengesetzt.

§. 192.

Lehrsatz.

Die Umfänge (Perimeter) zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander wie irgend zwei homologe Seiten in denselben.



Voraussetzung. Die zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM sind ähnlich.

Bewiesen soll werden, daß der Umfang des ersteren sich zum Umfang des letzteren Vielecks verhalte, wie z. B. AB : GH.

Beweis.

Da die Vielecke ABCDEF und GHJKLM ähnlich sind, so sind die Verhältnisse:

AB : GH
BC : HJ
CD : JK
DE : KL
EF : LM
FA : MG gleich; also

AB + BC + CD + DE + EF + FA : GH + HJ + JK + KL + LM + MG = AB : GH (§. 167, XI. 8) d. h.

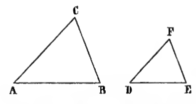
Umfang des 1sten Vlcks. : Umfang des 2ten = AB : GH
= BC : HJ
= CD : JK, u. s. w.

Geometrische Auflösung einiger Aufgaben, die sich auf die §§. 177—192 beziehen.

§. 193.

Aufgabe.

✝ Ueber einer gegebenen Linie ein Dreieck zu verzeichnen, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.



Erste Auflösung. Ist DE die gegebene Linie, und soll diese gleichliegend werden mit der Seite AB des gegebenen Dreiecks ABC, so trage man den Winkel CAB an den Punkt D und den Winkel CBA an den Punkt E der gegebenen Linie DE, so erhält man das verlangte Dreieck (§. 180).

Zweite Auflösung. An den Punkt D der gegebenen Linie DE lege man den W. FDE = CAB. Hierauf suche man zu AB, DE und AC die vierte Proportionale (§. 177) und mache DF derselben gleich, so erhält man das verlangte Dreieck (§. 182).

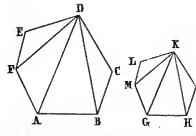
Dritte Auflösung. Zu AB, DE und AC suche man die vierte Proportionale X, und zu AB, DE und BC die vierte Proportionale Y; hierauf beschreibe man aus DE, X und Y ein Dreieck, so ist solches das verlangte (§. 183).

§. 194.

Aufgabe.

Es ist eine mehrseitige Figur gegeben; man soll eine ihr ähnliche über einer gegebenen Linie zeichnen, und zwar so, daß diese Linie gleichliegend wird mit einer bestimmten Seite der gegebenen Figur.

Auflösung. Es sei ABCDEF die gegebene Figur; man soll über der Linie KJ eine ihr ähnliche zeichnen, und zwar so, daß KJ gleichliegend mit DC werde.



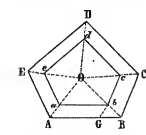
Aus einem Endpunkt der Linie DC ziehe man eine Diagonale BD so, daß dadurch von der Figur ein Dreieck DCB abgeschnitten wird. Dann zeichne man nach §. 193 über KJ ein Dreieck KJH, das dem Dreieck DCB ähnlich, und zwar so, daß KJ und DC gleichliegend werden.

Ferner ziehe man aus D die Diagonale DA, durch welche wieder ein Dreieck DBA abgeschnitten wird. Alsdann zeichne man über KH ein ähnliches Dreieck, so daß KH und DB gleichliegend werden.

Auf diese Art fahre man fort, bis die ganze gegebene Figur in Dreiecke zerlegt ist, und alle diese ähnlich abgezeichnet sind.

Daß alsdann die auf solche Art entstandene Figur GHJKLM der gegebenen ähnlich sei, erhellt aus §. 194.

Andere Auflösung. Wenn es verstattet ist, die verlangte Figur auf die gegebene zu verzeichnen, so verfährt man dabei auf folgende Art:



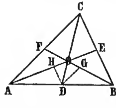
Es sei ABCDE die gegebene Figur. Man wähle innerhalb derselben einen Punkt O ganz beliebig, und ziehe aus demselben die Linie OA, OB, OC ꝛc. ꝛc. nach allen Winkel-Spitzen.

Ist nun m die Linie, auf welche eine der ABCDE ähnliche Figur gezeichnet werden soll, und soll m mit AB gleichliegend werden, so mache man AG = m, ziehe durch G die Gb parallel mit AO, und durch b die ab parallel mit AB, so ist AGba eine Parallelogramm (§. 71), und also AB = AG = m (§. 73).

Hierauf ziehe man ferner bc mit BC, cd mit CD ꝛc. ꝛc. parallel, so erhält man eine Figur, abcde, welche der ABCDE ähnlich sein wird (§. 191).

Anhang zum sechsten Abschnitt.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreieck ABC zwei Seiten AB und BC in D und E halbirt und aus den Spitzen A und C der Gegenwinkel Transversalen zieht, so schneiden sich diese in einem Punkte O stets so, 1) daß ihr oberer, d. h. der zwischen der Winkelspitze und dem Durchschnittspunkt liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der untere und 2) daß die aus der dritten Winkelspitze B durch O gezogene Transversale die Gegenseite AC ebenfalls halbirt.



Beweis. Man ziehe DH parallel mit BC, so ist (nach §. 171, 1) BE : DH = AB : AD = 2 : 1; also BE, mithin auch CE doppelt so groß als DH. Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke HDO und ECO, CO : OD = CE : DH; da nun CE doppelt so groß als DH, so ist auch CO doppelt so groß als DO. Eben so beweist man, daß AO doppelt so groß als OE ist.

2) Man ziehe DG parallel mit AC, so ist wieder AF doppelt so groß als DG. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FOC und DOG folgt aber auch, daß CO : OD = FC : DG. Da aber CO doppelt so groß als OD, so ist auch FC doppelt

so groß als DG. Mithin ist FC = AF, d. h. AC ist durch die Transversale BF ebenfalls halbirt.

Zusatz. Faßt man den vorigen Lehrsatz mit den drei Lehrsätzen im Anhang zum zweiten Abschnitt zusammen, so erhält man folgende 4 Sätze.

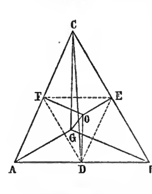
1) Die Halbirungsperpendikel der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkte (dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises).

2) Die senkrechten Transversalen oder Höhenperpendikel eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkte.

3) Die Winkelhalbirenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises).

4) Die Seitenhalbirenden Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkte, der jede von ihnen in zwei Abschnitte theilt, von denen der obere (zwischen der Winkelspitze und dem Durchschnittspunkt) doppelt so groß ist als der untere. (Dieser Punkt heißt aus physikalischen Gründen der S c h w e r p u n k t des Dreiecks).

Diesen Sätzen schließen sich noch folgende an:



5) **Lehrsatz.** Zieht man in einem Dreieck ABC die Seitenhalbirenden Senkrechten DO, FO und EO und ebenso die Höhenperpendikel CG, AG und BG bis zu ihrem Durchschnittspunkt, so ist der obere Theil jedes Höhenperpendikels (d. h. derjenige Theil, welcher zwischen der Winkelspitze und dem Durchschnittspunkt liegt) doppelt so groß als der mit ihm parallele Halbirungsperpendikel; z. B. CG doppelt so groß als DO.

Beweis. Die Dreiecke ACG und DOE sind ähnlich, weil die Seiten beziehungsweise parallel sind; deßhalb ist CG : DO = CA : DE = 2 : 1 (§. 171, 1) d. h. CG ist doppelt so groß als DO.

6) **Lehrsatz.** In einem jeden Dreieck liegen der Schwerpunkt, der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises in einer geraden Linie.

Beweis. In dem Dreieck ABC ist J der Durchschnitt der die Seiten halbirenden Transversalen, also der Schwerpunkt und CJ = 2 DJ (4). Der Durchschnittspunkt der Höhen ist G und O der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Da nun in den Dreiecken CJG und DJO die Seite CJ = 2 DJ, CG = 2 DO (5), und W. GCJ = W. JDO so sind diese Dreiecke ähnlich und mithin W. GJC = W. DJO. Da aber

CD eine Gerade ist, so muß es auch GJO sein und folglich liegen J, G und O in einer Geraden.

Zusatz. In den beiden ähnlichen Dreiecken CJG und DJO verhält sich GJ : JO = CG : DO = 2 : 1 (5); d. h. der Schwerpunkt ist vom Durchschnitt der Höhenperpendikel doppelt so weit entfernt als vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

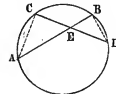
Siebenter Abschnitt.

Proportionalität der geraden Linien, Bögen und Winkel am Kreise.

§. 195.

Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises schneiden, so bilden die Abschnitte derselben eine Proportion, die man erhält, wenn man die beiden Abschnitte der einen Sehne zu äußeren und die beiden Abschnitte der andern Sehne zu mittleren Gliedern macht.



Voraussetzung. Die beiden Sehnen AB und CD schneiden sich innerhalb des Kreises in dem Punkt E.

Bewiesen soll werden, daß ihre vier Abschnitte in folgender Proportion stehen:

$$AE : ED = EC : EB,$$

in welcher die beiden Abschnitte der Sehne CD mittlere und die beiden Abschnitte der Sehne AB äußere Glieder sind.

Beweis.

Man ziehe AC und DB, so sind die beiden Dreiecke AEC und DEB ähnlich, weil Winkel A = W. D, und W. C = W. B (§. 146. 1). Es verhält sich also AE : ED = EC : EB. (Denn AE im Dreieck AEC und ED im Dreieck DEB sind gleichliegend als Gegenseiten der gleichen Winkel C und B; ebenso sind EC und EB gleichliegend als Gegenseiten der gleichen Winkel A und D).

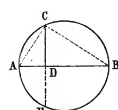
Anmerkung. Weil in der Proportion AE : ED = EC : EB ein Abschnitt AE der ersten Sehne zu einem Abschnitt ED der zweiten Sehne sich

verhält (nicht wie der andere Abschnitt der ersten Sehne zum andern Abschnitt der zweiten Sehne, sondern) wie der andere Abschnitt EC der **zweiten** Sehne zum andern Abschnitt EB der **ersten** Sehne, so drückt man diese Ordnung der Glieder dadurch aus, daß man sagt:

Die Abschnitte zweier im Kreise sich schneidender Sehnen sind umgekehrt proportionirt.

§. 195. a.

Zusätze.



1) **Ein von der Peripherie auf einen Durchmesser gefälltes Loth ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers.** Verlängert man das Loth CD bis F, so ist nach §. 195

$$AD : CD = DF : DB,$$

da aber $CD = DF$ (§. 133),

so ist auch $AD : CD = CD : DB$.

Diese Proportion folgt auch aus §. 189, 2, weil ACB ein in C rechtwinkliges Dreieck ist (§. 146, 3).

2) **Wenn man aus dem einen Endpunkt einer Sehne einen Durchmesser zieht und aus dem andern ein Loth auf diesen Durchmesser fällt, so ist die Sehne die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem an der Sehne anliegenden Abschnitt desselben.** Weil ACB ein Rechter ist, so hat man nach §. 189, 1 die Proportionen:

$$AB : AC = AC : AD$$

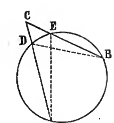
$$\text{und } AB : BC = BC : BD.$$

§. 196.

Lehrsatz.

Wenn zwei Sekanten von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt ausgehen, so bilden sie mit ihren außerhalb des Kreises liegenden Abschnitten eine Proportion, die man erhält, wenn man die eine Sekante sammt ihrem äußeren Abschnitt zu äußeren, und die andere Sekante sammt ihrem äußerem Abschnitt zu mittleren Gliedern nimmt.

Voraussetzung. Man hat aus dem Punkt C außerhalb des Kreises zwei Sekanten CA und CB nach dem Kreise gezogen.



Bewiesen soll werden, daß folgende Proportion stattfindet:

$$AC : BC = EC : DC,$$

in welcher die eine Sekante AC und ihr äußerer Abschnitt DC äußere, und die andere Sekante BC und ihr äußerer Abschnitt EC mittlere Glieder sind.

Beweis.

Man ziehe AE und BD, so sind die Dreiecke AEC und BDC ähnlich, weil W. A = W. B (§. 146. 1) und W. C beiden Dreiecken gemein ist. Es verhält sich also

$$AC : BC = EC : DC.$$

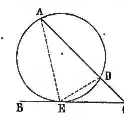
(denn AC und BC sind gleichliegend als Gegenseiten der gleichen Winkel AEC und BDC; eben so die Seiten EC und DC als Gegenwinkel der gleichen Winkel A und B).

Anmerkung. Aus einem ähnlichen Grund, wie in §. 195, Anm., sagt man: Zwei außerhalb des Kreises sich schneidende Sekanten stehen mit ihren äußeren Abschnitten in umgekehrter Proportion.

§. 197.

Lehrsatz.

Wenn man von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkt eine Tangente und eine Sekante nach dem Kreise zieht, so ist die Tangente (von ihrem Anfangspunkt bis zum Berührungspunkt gerechnet) die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.



Voraussetzung. Man hat aus dem Punkt C die Tangente CE und die Sekante CA nach dem Kreise gezogen.

Bewiesen soll werden, daß CA : CE = CE : CD.

Beweis.

Man ziehe AE und DE, so sind die beiden Dreiecke ACE und DCE ähnlich, weil Winkel DEC = W. CAE (§. 149) und W. C beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist Es verhält sich also

$$CA : CE = CE : CD.$$

(Denn CA im Dreiecke ACE und CE im Dreieck DCE sind gleichliegend, weil sie den gleichen Winkeln AEC und EDC gegenüber liegen; eben so sind

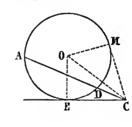
die Seiten CE im Dreieck ACE und CD im Dreieck DCE gleichliegend, als Gegenseiten der gleichen Winkel CAE und DEC.)

Die Tangente CE ist also die mittlere Proportionale zwischen der Sekante CA und ihrem äußeren Abschnitt CD.

* §. 197. a.

Lehrsatz.

Wenn man von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Sekante nach demselben zieht und noch eine andere Gerade, welche die Kreislinie in einem Punkt trifft, und es ist diese andere Gerade die mittlere Proportionallinie zwischen der Sekante und ihrem äußeren Abschnitt, so berührt sie den Kreis oder ist eine Tangente.



Voraussetzung. Man hat aus C die beiden Geraden CA und CE nach dem Kreis gezogen, von denen die erste ihn in D und A schneidet, die letztere aber ihn in E trifft. Es ist CA : CE = CE : CD.

Bewiesen soll werden, daß CE eine Tangente sei.

Beweis.

Man ziehe aus C die Tangente CM und die Gerade CO nach dem Mittelpunkt des Kreises.

Nun ist CA : CM = CM : CD (§. 192).
und da CA : CE = CE : CD (V.),
so ist CM = CE (§. 167. IV.)

Nun sind die Dreiecke COM und COE congruent (§. 53), und da W. CMO = 1 R, so ist auch W. CEO = 1 R; es steht also die Gerade CE senkrecht auf dem Halbmesser OE und ist eine Tangente an dem Kreis (§. 140).

§. 197. b.

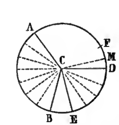
Lehrsatz.

In gleichen Kreisen oder in einem und demselben Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunkt wie die zu ihnen gehörigen Bögen.

Voraussetzung. ACB und DCE sind zwei Mittelpunktswinkel in demselben Kreise.

Bewiesen soll werden, daß ACB : DCE = AB : DE.

Beweis.



Man denke sich die beiden Bögen AB und DE durch ein gemeinschaftliches Maß gemessen, das in AB z. B. 7, und in DE 4 mal enthalten sei, so verhält sich

$$1)\ AB : DE = 7 : 4.$$

Nun denke man sich aus den Theilpunkten der Bögen AB und DE Halbmesser nach dem Mittelpunkt C gezogen, so wird dadurch der Winkel ACB in 7 und der W. DCE in 4 Winkel getheilt, welche alle einander gleich sind (§. 128). Mithin verhält sich auch

$$2)\ W.\ ACB : W.\ DCE = 7 : 4.$$

Aus 1) und 2) aber folgt:

$$W.\ ACB : W.\ DCE = AB : DE.$$

Anmerkung. Es wurde hier vorausgesetzt, die beiden Bögen AB und DE hätten ein gemeinschaftliches Maß. Für den Fall, daß sie incommensurabel sind, gilt der Lehrsatz ebenfalls unter Berücksichtigung von §. 166, Nro. 4; doch läßt es sich auch indirekt auf folgende Art beweisen:

Angenommen, die Proportion

$$ACB : DCE = AB : DE.$$

sei unrichtig, und es verhalte sich

$$ACB : DCE = AB : FE,$$

wo FE größer als DE genommen ist.

Nun nehme man ein Maß von AB, das kleiner ist als FD, und trage dasselbe von E gegen F, so muß wenigstens ein Theilpunkt zwischen D und F fallen. (Auf D kann kein Theilpunkt fallen, weil AB und DE als incommensurabel vorausgesetzt sind.) Dieser Theilpunkt sei M. Man ziehe MC, so ist

$$ACB : MCE = AB : ME$$

und da $ACB : DCE = AB : FE$ (nach der Annahme)

so wäre $MCE : DCE = ME : FE.$

In dieser Proportion ist MCE größer als DCE, folglich müßte auch ME größer als FE sein. Es ist aber ME kleiner als FE, mithin die Proportion

$$MCE : DCE = ME : FE$$

unrichtig.

Auf eine solche Unrichtigkeit wäre man auch gekommen, wenn man in der Proportion

$$ACB : DCE = AB : FE$$

das vierte Glied FE kleiner als DE genommen hätte. Es muß also FE gleich DE sein; mithin ist die Proportion

$$ACB : DCE = AB : DE$$

richtig.

Zusatz. Ganz auf dieselbe Art beweist man, daß auch zwei Mittelpunktswinkel sich wie die zu ihnen gehörigen Ausschnitte oder Sektoren (aber nicht wie die Sehnen und Abschnitte) verhalten.

Geometrische Auflösung einiger Aufgaben, welche sich auf die §§. des VII. Abschnitts beziehen.

§. 198.

Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien M und N gegeben; man soll die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen ihnen construiren.

M N G A B C

Erste Auflösung. Man ziehe eine Gerade AC, mache AB = M und BC = N, und beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis. Errichtet man nun in B das Loth BG, so wird solches die verlangte mittlere Proportionale sein. (§. 195. a. Nro. 1.)

M N G A B C

Zweite Auflösung. Man nehme AC = M und AB = N, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte in B ein Loth BG und ziehe AG, so ist letztere die gesuchte mittlere Proportionale (§. 195. a. Nro. 2).

Anmerkung. Die Aufgabe: zu zwei Linien M und N die dritte Proportionale zu finden (§. 178), kann nun auch auf folgende Art gelöst werden:

Man mache AB = M (Fig. zur Auflös. 1.), errichte in B auf AB das Loth BG = N, ziehe AG und errichte in G auf AG das Loth GC, so ist BC (d. h. die Verlängerung von AB bis zum Durchschnitt mit GC) die verlangte dritte Proportionale; denn es ist

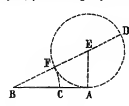
$$AB : BG = BG : BC,$$
oder $M : N = N : BC$.

§. 199.

Aufgabe.

Eine gerade Linie soll nach dem äußeren und mittleren Verhältniß getheilt werden, d. h. sie soll so in zwei Theile getheilt

werden, daß der größere Theil die mittlere Proportionale sei, zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theile.



Auflösung. Es sei AB die gegebene Linie. Man errichte in A eine Senkrechte AE auf AB, mache sie gleich der Hälfte von AB und beschreibe aus E mit dem Halbmesser AE einen Kreis. Hierauf ziehe man BD und mache BC = BF, so wird die Linie AB in dem Punkt C auf die verlangte Art getheilt sein.

Beweis.

Da BA eine Tangente (§. 140), und BD eine Sekante, so ist

$$BD : BA = BA : BF \text{ (192); also auch}$$

$$BD - BA : BA = BA - BF : BF \text{ (§. 167. XI, 7).}$$

Da nun $BA = 2AE = FD$, so ist

$$BD - FD : BA = BA - BF : BF;$$

nun ist $BD - FD = BF = BC$ und

$$BA - BF = BA - BC = CA; \text{ also}$$

$$BC : BA = CA : BC, \text{ oder}$$

$$BA : BC = BC : CA.$$

Da nun, im ersten Verhältniß, BC kleiner ist als BA, so ist auch im zweiten CA kleiner als BC.

Es ist also BC der größere Theil und zugleich die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie AB und dem kleineren Theil AC.

Anmerkung. 1) Die alten Mathematiker legten dieser Theilung einen so großen Werth bei, daß sie dieselbe den goldenen Schnitt nannten.

* 2) Verlängert man eine nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse getheilte Linie um die Länge des größeren Abschnittes, so ist die ganze so entstandene Linie in dem Punkte, wo die Verlängerung anfing, ebenfalls nach dem äußern und mittleren Verhältnisse getheilt und zwar so, daß die ursprünglich gegebene Linie den größeren Abschnitt bildet. Ist nämlich l die gegebene Linie, g der größere und k der kleinere Abschnitt, so ist $g + k = l$ und $l + g$ die verlängerte Linie.

Da nun $l : g = g : k$, so ist auch

$$l + g : l = g + k : g \text{ (§. 167, XI, 2, 8),}$$

oder $l + g : l = l : g$;

d. h. die gegebene Linie ist die mittlere Proportionale zwischen der verlängerten Linie und dem Abschnitt g.

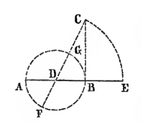
§. 199. a.

Aufgabe.

Eine Gerade stetig zu verlängern, d. h. so zu verlängern, daß die verlängerte Gerade zu der gegebenen sich verhält, wie die gegebene zur Verlängerung.

Auflösung. Ist AB die Gerade, so errichte man in ihrem einen Endpunkt B ein Loth gleich AB, verbinde die Mitte D von AB mit C, ziehe aus D als Mittelpunkt mit DC den Bogen CE, so ist AE : AB = AB : BE.

Beweis.



Beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis und verlängere CD zur Sekante CF, so ist nach §. 197

$$FC : BC = BC : GC.$$

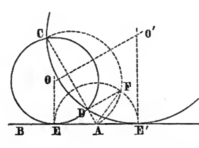
Nun ist BC = AB, DC = DE, FD = DA folglich DC + DF = DE + AD d. i. FC = AE; ebenso ist DC — DG = DE = DB d. i. GC = BE; setzt man diese Werthe in die obige Proportion, so erhält man

$$AE : AB = AB : BE.$$

* §. 200.

Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte C und D geht, und eine unbegrenzte, der Lage nach gegebene Gerade AB berührt.



Auflösung. Man verbinde die Punkte D und C durch eine gerade Linie und verlängere dieselbe, bis sie die AB in A schneidet.

Dann suche man zwischen AC und AD die mittlere Proportional-Linie AF und trage sie auf AB gleich AE. Der Punkt E wird nun der Berührungs-Punkt der Geraden AB und des gesuchten Kreises sein (§. 197. a). Man hat also die drei Punkte E, C und D, durch welche nach §. 160 der verlangte Kreis beschrieben werden kann.

Man sieht aus der Figur, daß die Aufgabe zwei verschiedene Auflösungen zuläßt.

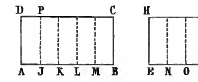
Achter Abschnitt.

Ausmessung der geradlinigen Figuren.

§. 201.

Lehrsatz.

Wenn zwei Rechtecke gleiche Höhe haben, so verhalten sich ihre Flächen zu einander wie ihre Grundlinien, und umgekehrt, wenn zwei Rechtecke gleiche Grundlinie haben, so verhalten sich ihre Flächen zu einander wie ihre Höhen.



Voraussetzung. Die beiden Rechtecke ABCD und EFGH haben gleiche Höhen BC und FG.

Beweisen soll werden, daß ABCD:EFGH = AB:EF.

Beweis.

Um das Verhältniß von AB und EF zu bestimmen, denke man sich diese beiden Linien durch ein gemeinschaftliches Maß m gemessen, das in AB z. B. fünfmal, in EF aber dreimal enthalten sein mag. Aus allen Theilpunkten J, K, L, M, N, O dieser Linien ziehe man nach DC und HG Senkrechte, so wird das Rechteck ABCD dadurch in fünf, und das Rechteck EFGH in drei gleiche Rechtecke getheilt (das Rechteck AJPD ist in ABCD fünfmal, in EFGH aber dreimal enthalten).

Es verhält sich also ABCD : EFGH = 5 : 3
und ebenso AB : EF = 5 : 3

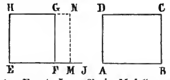
also ABCD : EFGH = AB : EF. (§. 167, XI, 2).

Die Rechtecke ABCD und EFGH verhalten sich also, wie ihre Grundlinien AB und EF.

Für den Fall, daß die Rechtecke gleiche Grundlinien haben, wird auf ähnliche Art bewiesen, daß sie sich verhalten, wie ihre Höhen.

Anmerkung. Man hat bei dem obigen Beweise vorausgesetzt, daß die Grundlinien AB und EF beider Rechtecke commensurabel seien. Angenommen, sie

seien incommensurabel, so gilt der Lehrsatz ebenfalls unter Berücksichtigung von §. 166, Nr. 4; er kann aber in diesem Falle auch indirekt auf folgende Art bewiesen werden.



Gesetzt, es verhalte sich in dem angenommenen Fall ABCD : EFGH = AB : EJ, wo EJ größer ist als EF; nun nehme man ein Maß von AB, das kleiner ist als FJ und trage es von E gegen J, so wird wenigstens ein Theilpunkt zwischen F und J, z. B. in M fallen. Nun errichte man in M ein Loth, das die verlängerte HG in N schneide, so ist, nach obigem Beweise

ABCD : EMNH = AB : EM;

da aber auch ABCD : EFGH = AB : EJ (B.)

so wäre EMNH : EFGH = EM : EJ.

In dieser Proportion ist EFGH kleiner als EMNH, also müßte auch EJ kleiner sein als EM. Da aber EJ größer ist, als EM, so ist die Proportion unrichtig. Man wird aber immer auf eine solche Unrichtigkeit kommen, so oft man, wie es hier geschehen, EJ größer nimmt als EF. Es darf also EJ nicht größer sein als EF.

Nimmt man hingegen EJ kleiner als EF, so ergibt sich eine ähnliche Unrichtigkeit. Es muß also EJ gleich EF sein.

Die Proportion ABCD : EFGH = AB : EF ist also richtig, auch in dem Falle, wenn die Grundlinien AB und EF incommensurabel sind.

§. 202.

Lehrsatz.

Die Flächeninhalte zweier Rechtecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Beweis.

Die Maßzahlen der beiden durch einerlei Maß gemessenen Rechtecke seien M und N; die Maßzahlen der Grundlinie und Höhe des ersten Rechtecks G und H, und die der Grundlinie und Höhe des zweiten Rechtecks g und h. Nun denke man sich ein drittes Rechteck, das die Grundlinie G vom ersten und die Höhe h vom zweiten Rechteck habe und in welchem das gemeinschaftliche Maß der beiden Rechtecke P mal enthalten sei, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} M : P = H : h \\ P : N = G : g \end{array}\right\} \text{(§. 201 und §. 176; XI, 1),}$$

also $M \times P : N \times P = G \times H : g \times h$ (§. 167; X);

mithin auch $M : N = G \times H : g \times h$ (wenn man im ersten Verhältniß den Faktor P wegdividirt).

Die beiden Rechtecke verhalten sich also wie die Produkte aus den Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Anmerkung. Der Kürze halber sagt man: Zwei Rechte verhalten sich wie die Produkte ihrer Grundlinien und Höhen.

§. 202. a.

Zusätze.

1) Zwei Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich ihrem Flächeninhalt nach wie ihre Grundlinien, und umgekehrt: zwei Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Denn man kann sich jede zwei Parallelogramme von gleicher Höhe in zwei Rechtecke von derselben Höhe und beziehungsweise gleichen Grundlinien verwandelt denken. Ebenso kann man sich zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie in zwei Rechtecke von derselben Grundlinie und beziehungsweise gleichen Höhen verwandelt denken.

2) Zwei Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich ihrem Flächeninhalt nach wie ihre Grundlinien, und umgekehrt: zwei Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Es seien D und d die beiden Dreiecke, G und g ihre Grundlinien und H ihre Höhe. Nun kann man sich dieselben in zwei Rechtecke R und r verwandelt denken, welche beide H zur Höhe und beziehungsweise $\frac{1}{2}G$ und $\frac{1}{2}g$ zu Grundlinien haben. Es ist also

$$R : r = \tfrac{1}{2} G : \tfrac{1}{2} g \quad (§.\ 201),$$

also auch $D : d = \frac{1}{2} G : \frac{1}{2} g$

und mithin auch $D : d = G : g$ (§. 167, XI, 5).

Ebenso beweist man den umgekehrten Fall.

3) Zwei Parallelogramme verhalten sich ihrem Flächeninhalt nach überhaupt wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen. Dieser Satz ist im nämlichen Sinne zu nehmen wie §. 202 und kann aus Nro. 1 und 2 dieses §. ebenso bewiesen werden, wie er in §. 202 für zwei Rechtecke bewiesen wurde.

4) Es seien P und p die Flächeninhalte zweier Rechtecke, zweier Parallelogramme, oder zweier Dreiecke; G und g die Maßzahlen der dazu gehörigen Grundlinien, H und h die der Höhen, so ist also

$$P : p = G h : g h.$$

Ist nun $P = p$, so ist auch $G H = g h$, woraus (§. 167, V) die Proportion folgt: $G : g = h : H$; d. h. wenn zwei Rechtecke, zwei

Parallelogramme, oder zwei Dreiecke an Flächeninhalt gleich sind, so verhalten sich die Maßzahlen ihrer Grundlinien zu einander, wie umgekehrt die Maßzahlen ihrer Höhen; woraus (§. 167, XI, 2) folgt, daß in gleichen Rechtecken, Parallelogrammen oder Dreiecken auch die Grundlinien selbst sich zu einander verhalten, wie umgekehrt die Höhen.

§. 203.

Erklärung.

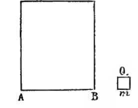
Den Inhalt einer Fläche finden, oder eine Fläche messen, heißt nichts anderes als untersuchen, wie oft diese Fläche eine andere als Einheit oder Maß angenommene Fläche von bekannter Größe enthält. Bei der Ausmessung der Flächen bedient man sich allgemein des Quadrates als der Maßeinheit, und man versteht also unter dem Inhalt einer Fläche diejenige ganze oder gebrochene Zahl, welche anzeigt, wie oft diese Fläche ein als Einheit angenommenes Quadrat enthält oder auch, wie vielmal dieses Quadrat genommen werden muß, um jene Fläche hervorzubringen. Zur Seite eines solchen Quadrates, das als Flächenmaß dienen soll, wählt man eine Einheit des Längenmaßes und gibt alsdann dem Quadrate denselben Namen, welchen die Seite desselben im Längenmaße führt, nur mit Vorsetzung des Wortes Quadrat.

Quadrat-Ruthe heißt z. B. dasjenige Quadrat, dessen Seite eine Längenruthe ist, Quadrat-Fuß dasjenige Quadrat, dessen Seite ein Längen-Fuß ist 2c. 2c.

§. 204.

Lehrsatz.

Wenn man die Grundlinie und Höhe eines Rechtecks durch einerlei Längen-Einheit mißt, und die beiden dadurch erhaltenen Maßzahlen (welches ganze oder gebrochene Zahlen sind) mit einander multiplicirt, so zeigt die Zahl, die man auf diese Art erhält, an, wie vielmal das Quadrat über jener Längen-Einheit in dem Rechteck enthalten ist.



Voraussetzung. Man hat die Grundlinie AB und die Höhe BC des Rechtecks ABCD durch die Längen-Einheit m gemessen und gefunden, daß m z. B. fünfmal in AB und neunmal in BC enthalten ist.

Bewiesen soll werden, daß auch das Quadrat Q über m im Rechteck ABCD 5×9 oder 45 mal enthalten ist.

— Ruthe.... pertica

Beweis.

Nach §. 202 verhält sich

$$\text{Rechteck ABCD: Quadrat Q} = AB \times BC : m \times m = 5 \times 9 : 1 \times 1 = 45 : 1;$$

d. h. Q ist in ABCD fünfundvierzigmal enthalten.

Erste Anmerkung. Ist m ein Längen-Fuß, so ist Q ein Quadrat-Fuß und der Inhalt des Rechtecks abcd beträgt also fünfundvierzig Quadrat-Füße.

Obigen Lehrsatz pflegt man gewöhnlich ganz kurz so auszudrücken: der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Zweite Anmerkung. Jedes Produkt a . b zweier Zahlen a und b kann man sich als den Inhalt eines Rechtecks denken, dessen beide Seiten durch die Maßzahlen a und b ausgedrückt sind. Man pflegt daher auch den Inhalt eines aus A und B construirten Rechtecks dadurch anzuzeigen, daß man schreibt: $A \times B$ (vergl. §. 82).

§. 205.

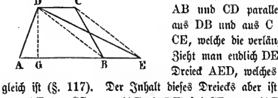
Zusätze.

1) Der Inhalt eines Parallelogrammes wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt (§. 204, Anm. 1).

2) Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, und das Produkt halbirt; oder was dasselbe ist, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der Höhe multiplicirt (§. 97).

3) Der Inhalt eines jeden Vierecks wird gefunden, wenn man es in zwei Dreiecke zerlegt, die Inhalte dieser letztern nach Nro. 2 findet, dann zusammen addirt.

4) Der Inhalt eines Vierecks, das zwei parallele Gegenseiten hat (eines Paralleltrapeziums), wird gefunden, wenn man die Summe der beiden Parallelseiten mit ihrem senkrechten Abstand multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

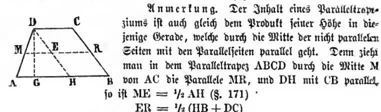


Es sei ABCD ein Viereck, in welchem AB und CD parallel seien. Man ziehe aus DB und aus C mit CB die Parallele CE, welche die verlängerte AB in E treffe. Zieht man endlich DE, so erhält man das Dreieck AED, welches dem Viereck ABCD gleich ist (§. 117). Der Inhalt dieses Dreiecks aber ist

$$\frac{AE \times CG}{2} = \frac{(AB + BE) \times CF}{2} = \frac{(AB + CD) \times CG}{2}$$

oder auch $= \frac{1}{2}(AB + CD) \times CG$.

Dieses ist also auch der Inhalt des Paralleltrapezes ABCD.



Anmerkung. Der Inhalt eines Paralleltrapeziums ist auch gleich dem Produkt seiner Höhe in diejenige Gerade, welche durch die Mitte der nicht parallelen Seiten mit den Parallelseiten parallel geht. Denn zieht man in dem Paralleltrapez ABCD durch die Mitte M von AC die Parallele MR, und DH mit CB parallel, so ist $ME = \frac{1}{2} AH$ (§. 171)

$$ER = \frac{1}{2}(HB + DC)$$

also $ME + ER = \frac{1}{2}(AH + HB + CD)$

oder $MR = \frac{1}{2}(AB + CD)$

Mithin der Inhalt des Paralleltrapezes $= MR \times CG$.

5) Der Inhalt einer jeden geradlinigen Figur wird gefunden, wenn man sie in lauter Dreiecke oder Paralleltrapezien zerlegt, hierauf die Inhalte der letztern findet und zusammen addirt.

§. 206.

Zusatz.

Der Inhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

Da also die Seite einer Quadrat-Ruthe eine Längen-Ruthe ist und zehn Fuß enthält, so wird eine Quadrat-Ruthe hundert Quadrat-Fuß enthalten.

Ebenso enthält ein Quadrat-Fuß hundert Quadrat-Zolle, ein Quadrat-Zoll hundert Quadrat-Linien 2c. 2c.

Enthält ein Fuß aber zwölf Zoll, so enthält der Quadrat-Fuß 144 Quadrat-Zoll 2c. 2c.

Anmerkung. Ist a die Seite eines Quadrats, so pflegt man den Inhalt des Quadrats durch $a . a$ oder a^2 zu bezeichnen (§. 82), welche Bezeichnung aus der Arithmetik entlehnt ist und ihren Grund im Vorhergehenden hat.

§. 207.

Lehrsatz.

Wenn vier Linien in Proportion stehen, so ist das Rechteck aus den äußeren Gliedern dem Rechteck aus den mittleren Gliedern gleich.

Beweis.

Die vier Linien A, B, C und D bilden folgende Proportion

$$A : B = C : D,$$ wo man unter A, B, C, D die auf einerlei Maß sich beziehenden Maßzahlen dieser Linien versteht.

Hieraus aber folgt, daß

$$A \times D = B \times C$$ (§. 167, IV).

$A \times D$ aber bezeichnet den Inhalt eines Rechtecks, dessen Grundlinie A und dessen Höhe D; $B \times C$ hingegen bezeichnet den Inhalt eines Rechtecks, dessen Grundlinie B und dessen Höhe C ist (§. 204, Anm. 2).

* §. 207. a.

Zusätze.

Die in den §§. 195, 196 und 197 gegebenen Lehrsätze lassen sich nun auch so ausdrücken:

1) Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der ersten Sehne so groß, als das Rechteck aus den Abschnitten der andern Sehne.

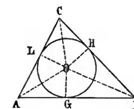
2) Wenn zwei Sekanten von einem außerhalb des Kreises befindlichen Punkte ausgehen, so ist das Rechteck aus der ganzen ersten Sekante und ihrem äußern Abschnitte so groß als das Rechteck aus der andern Sekante und ihrem äußern Abschnitte.

3) Wenn aus einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte eine Tangente und eine Sekante nach dem Kreise gezogen werden, so ist das Quadrat der Tangente (von ihrem Anfangspunkt bis zum Berührungspunkt gerechnet) so groß als das Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußern Abschnitt.

Anhang zum achten Abschnitt.

Lehrsatz 1.

1) Der Inhalt eines Dreiecks ABC ist gleich dem Produkt aus seinem Umfang und dem halben Radius r des eingeschriebenen Kreises.



Beweis.

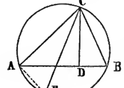
Es sei OG = OH = OL = r; so ist der Inhalt dieser Dreiecke

$$\left.\begin{array}{l} AOB = AB \,.\, {}^1\!/_2\, r \\ AOC = AC \,.\, {}^1\!/_2\, r \\ BOC = BC \,.\, {}^1\!/_2\, r \end{array}\right\} \text{§. 205.}$$

also $\triangle AOB + \triangle AOC + \triangle BOC = (AB + AC + BC)\ {}^1\!/_2\, r$, d. h. $\triangle ABC = (AB + AC + BC)\ {}^1\!/_2\, r$.

Lehrsatz 2.

In jedem in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecke ABC ist das Produkt zweier Seiten AC und BC gleich dem Produkt aus der Höhe CD der dritten Seite und dem Durchmesser des Kreises.



Beweis.

Ist CE der Durchmesser, so sind die beiden Dreiecke ACE und DCB ähnlich; denn Winkel EAC = 1 R (§. 146, 3) = BDC, und Winkel AEC = Winkel DBC (§. 146, 1);

mithin AC : DC = EC : BC;

also $AC \times BC = DC \times EC$.

Zusatz a.

Der Inhalt eines Dreiecks ist also auch gleich dem Produkt seiner drei Seiten dividirt durch den doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Denn da (vorige Figur) $AC \times BC = DC \times EC$, so folgt:

$$\frac{AC \times BC}{EC} = DC;$$

$$\text{also} \quad \frac{AC \times BC \times AB}{EC} = AB \times DC$$

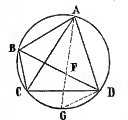
$$\text{und} \quad \frac{AC \times BC \times AB}{2\,EC} = \frac{AB \times DC}{2} = \text{Inh. des Dreiecks.}$$

Zusatz b.

Wenn verschiedene Dreiecke in denselben oder in gleiche Kreise beschrieben werden, so verhalten sich ihre Flächen-Inhalte wie die Produkte aus ihren Seiten.

Lehrsatz 3.

In einem jeden in den Kreis eingeschriebenen Vierecke ABCD ist das Produkt aus beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Gegenseiten.



Beweis.

Man mache den Bogen DG = BC und ziehe die Sehne DG. Nun sind

1) die Dreiecke ABC und AFD ähnlich, weil W. ACB = W. ADF und W. BAC = W. FAD (§. 146, 1).

2) Auch die Dreiecke ACD und AFB sind ähnlich, weil W. ACD = ABF und W. BAF = W. CAD (weil W. BAC + W. CAF = W. FAD + W. CAF).

Aus 1) folgt aber $AC : AD = BC : FD$,
und aus 2) folgt $AC : AB = CD : BF$;
also auch $AC \times FD = BC \times AD$
und $AC \times BF = CD \times AB$

und mithin $AC.(BF + FD) = CD \times AB + BC \times AD$,
d. h. $AC \times BD = CD \times AB + BC \times AD$.

× Anmerkung. Dieser Satz führt den Namen seines Erfinders Ptolemäus, der in der ersten Hälfte des zweiten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung in Alexandrien lebte und den Satz zu Berechnung der Sehnen gegebenen Bogen anwendete. Der pythagoräische Satz läßt sich aus dem ptolemäischen leicht auf folgende Weise herleiten. Es sei BAD ein in A rechtwinkliges Dreieck, so ist BD ein Durchmesser. Nun ziehe man aus A einen zweiten Durchmesser AC; ferner BC und DC, so ist ABCD ein Kreis-Viereck, und zwar, weil jeder seiner Winkel ein Rechter ist, ein Parallelogramm (§. 74, a). Nun ist nach dem ptolomäischen Satze:

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC;$$

da aber $AC = BD$, $AB = CD$ und $AD = BC$,
so ist auch $BD^2 = AB^2 + AD^2$. ×

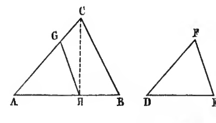
Neunter Abschnitt.

Verhältniß der Flächen ähnlicher Figuren.

§. 208.

Lehrsatz.

Zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel enthalten, verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen (wo unter den Seiten die Zahlen verstanden werden, welche man erhält, wenn man beide durch einerlei Maß mißt).



Voraussetzung. In den beiden Dreiecken ABC und DEF sind die Winkel A und D gleich.

Bewiesen soll werden, daß
Dr. ABC : Dr. DEF = AB $\times$ AC : DE $\times$ DF.

Beweis.

Man mache AH = DE und AG = DF, und ziehe GH, so ist Dr. AHG dem Dr. DEF congruent (§. 41). Nun ziehe man HC; da nun die Dreiecke AHG und AHC gleiche Höhe haben (§. 93, a), so ist

Dr. AHC : AHG = AC : AG (§. 202, a; 2); aus demselben Grunde ist auch Dr. ABC : AHC = AB : AH.

Sind nun D, δ, d die Maßzahlen der Dreiecke ABC, AHC, AHG und versteht man unter AC, AG, AB, AH die Maßzahlen dieser Linien,

so ist $\delta : d = AC : AG$
$D : \delta = AB : AH$

also $D \times \delta : d \times \delta = AB \times AC : AH \times AG$; und wenn man im ersten Verhältnisse den Faktor δ wegdividirt:

$$D : d = AB \times AC : AH \times AG$$

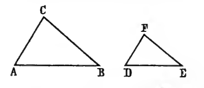
oder $D : d = AB \times AD : DE \times DF$.

Mithin verhalten sich auch die Dreiecke ABC und AHG d. i. ABC und DEF wie die Produkte aus den Maßzahlen der den gleichen Winkel einschließenden Seiten (§. 167, XI, 1).

§. 209.

Lehrsatz.

Die Flächen zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate zweier homologen Seiten.



Voraussetzung. Die Dreiecke ABC und DEF sind ähnlich.

Bewiesen soll werden, daß

Dr. ABC : Dr. DEF $= AB^2 : DE^2$.

Beweis.

Da die Dreiecke ABC und DEF ähnlich sind, so ist W. A = W. D, mithin

1) Dr. ABC : Dr. DEF $= AB \times AC : DE \times DF$ (§. 208),
ferner da $AB : DE = AC : DF$ (B.)
und $AB : DE = AB : DE$,

so ist auch 2) $AB^2 : DE^2 = AB \times AC : DE \times DF$.

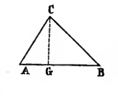
Aus (1) und (2) aber folgt

Dr. ABC : Dr. DEF $= AB^2 : DE^2$;
und da $AB : DE = BC : EF$,
also auch $AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2$,

so ist auch Dr. ABC : Dr. DEF $= BC^2 : EF^2$,
und eben so auch $= AC^2 : DF^2$.

§. 210.

Zusatz.



Zieht man die Höhen CG und FH, so sind die bei G und H rechtwinkligen Dreiecke BGC und EHF ähnlich (§. 187, 1),

also $BC : EF = CG : FH$,
also auch $BC^2 : EF^2 = CG^2 : FH^2$.

Da aber Dr. ABC : Dr. DEF $= BC^2 : EF^2$,

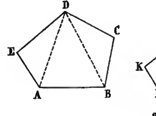
so ist auch Dr. ABC : Dr. DEF $= CG^2 : FH^2$.

Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich also auch zu einander wie die Quadrate ihrer Höhen.

§. 211.

Lehrsatz.

Die Flächen zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate zweier homologen Seiten.



Voraussetzung. Die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK sind ähnlich.

Bewiesen soll werden, daß

$$ABCDE : FGHJK = AE^2 : FK^2.$$

Beweis.

Man theile die beiden Vielecke aus den homologen Winkelspitzen D und J in ähnliche Dreiecke (§. 191).

Es ist also

$$\text{Dr. } AED : \text{Dr. } FKJ = AD^2 : FJ^2$$

und $\text{Dr. } ADB : \text{Dr. } FJG = AD^2 : FJ^2$

und $\text{Dr. } BDC : \text{Dr. } GJH = BD^2 : GJ^2 = AD^2 : FJ^2$

also $\text{Dr. } AED : \text{Dr. } FKJ = \text{Dr. } ADB : \text{Dr. } FJG = \text{Dr. } BDC : \text{Dr. } GJH,$

mithin nach §. 167, XI.

$$AED + ADB + BDC : FKJ + FJG + GJH = AED : FKJ$$

d. i. Vieleck $ABCDE$: Vieleck $FGHJK = AED : FKJ$

Da aber $\text{Dr. } AED : \text{Dr. } FKJ = AE^2 : FK^2$

so ist auch $\text{V. } ABCDE : \text{V. } FGHJK = AE^2 : FK^2.$

§. 212.

Zusatz.

Da $AE : FK = AD : FJ$, folglich auch $AE^2 : FK^2 = AD^2 : FJ^2$, so verhält sich auch

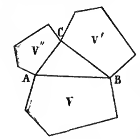
$$ABCDE : FGHJK = AD^2 : FJ^2,$$

d. h. zwei ähnliche Vielecke verhalten sich auch zu einander, wie die Quadrate zweier homologen Diagonalen.

§. 213.

Lehrsatz.

Wenn man auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke verzeichnet, so ist der Inhalt des Vielecks über der Hypotenuse so groß als die Inhalte der Vielecke über den Katheten zusammen genommen.



Voraussetzung. ABC ist ein in C rechtwinkliges Dreieck. Die Vielecke V, V′ und V″ über seinen Seiten sind einander ähnlich.

Bewiesen soll werden, daß das Vieleck V über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Vielecke V′ und V″ über den beiden Katheten ist.

Beweis.

Da die Vielecke V′ und V″ ähnlich sind, so ist

$$V' : V'' = BC^2 : AC^2 \text{ (§. 211)};$$

also auch $V' + V'' : V'' = BC^2 + AC^2 : AC^2$ (§. 167. VI.)

Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, so ist $BC^2 + AC^2 = AB^2$,

somit I. $V' + V'' : V'' = AB^2 : AC^2$.

Aus der Aehnlichkeit von V und V″ folgt ferner:

II. $V : V'' = AB^2 : AC^2$, somit

$$V : V'' = V' + V'' : V'' \text{ (§. 167. II.)}$$

Da nun $V'' = V''$, so ist auch

$$V = V' + V'' \text{ (§. 167. II. 2)}$$

Geometrische Auflösung einiger Aufgaben, die sich auf die §§. 201—213 beziehen.

§. 214.

Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Geraden a ein Rechteck zu verzeichnen, das einem gegebenen Rechteck B, welches h zur Höhe und g zur Grundlinie hat, an Flächeninhalt gleich sei.

Auflösung. Man suche zu A, G und H die vierte Proportionale X, und construire aus A und X ein Rechteck, so ist solches das verlangte (§. 207).

§. 215.

Aufgabe.

Das Verhältniß des Rechtecks aus den Linien A und B zu dem Rechteck aus den Linien C und D in Linien darzustellen.

Auflösung. Es sei in dem Linien-Verhältniß, wodurch das Verhältniß der beiden Rechtecke dargestellt werden soll, das Vorderglied A.

Nun suche man zu B, C und D eine vierte Proportionale P, so ist solche das Hinterglied des gesuchten Linien-Verhältnisses, d. h. es ist

$$\text{Rechteck } (A \times B) : \text{Rechteck } (C \times D) = A : P.$$

Beweis.

Da $B : C = D : P$, so ist $B \times P = C \times D$ (§. 207),
Nun ist $\text{R. } (A \times B) : \text{R. } (C \times D) = A \times B : C \times D$ (§. 202),
oder $\text{R. } (A \times B) : \text{R. } (C \times D) = A \times B : B \times P$,
also $\text{R. } (A \times B) : \text{R. } (C \times D) = A : P$ (§. 167, XI, Zus. 1).

§. 216.

Aufgabe.

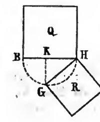
Wenn zwei ähnliche Figuren gegeben sind, eine dritte ähnliche Figur zu zeichnen, die so groß ist, als die Summe oder der Unterschied der beiden ersten.

Die Auflösung folgt aus §. 213.

§. 217.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu finden, welches sich zu einem gegebenen Quadrat wie $m : n$ (z. B. wie $3 : 5$) verhält.



Auflösung. Man theile die Seite BH des gegebenen Quadrats Q in m (also hier in 5) gleiche Theile und nehme $HK = n$ (hier gleich 3) solchen Theilen. Beschreibt man über BH den Halbkreis BGH, errichtet ferner in K die Senkrechte KG, und zieht die Sehne HG, so ist solche die Seite und R das gesuchte Quadrat.

Denn weil das Quadrat über BH = BH $\times$ BH, und das Quadrat über HG = BH $\times$ HK (§. 100, 2), so ist

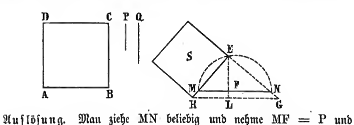
$$BH^2 : HG^2 = BH \times BH : BH \times HK$$

also $BH^2 : HG^2 = BH : HK = 3 : 5.$

* §. 217. a.

Aufgabe.

Es soll ein Quadrat construirt werden, das sich zu einem gegebenen Quadrat ABCD verhalte, wie die Linie P zur Linie Q.



Auflösung. Man ziehe MN beliebig und nehme MF = P und FN = Q. Hierauf beschreibe man über MN einen Halbkreis und errichte aus F die Senkrechte FE, die den Halbkreis in E schneidet. Aus E ziehe man durch M und N die Geraden EM und EN, nehme auf EN das Stück EG = AB und ziehe durch G mit MN die Parallele GH, so ist EH die Seite und S das gesuchte Quadrat.

Da $EH^2 = HG \times HL$ und $EG^2 = HG \times LG$ (§. 100, Nro. 2), so hat man $EH^2 : EG^2 = HG \times HL : HG \times LG$

$$= HL : LG$$

$$= MF : FN$$

d. h. $EH^2 : AB^2 = P : Q$ (§. 171, Nro. 3).

Anmerkung. Aus Proportion $EH^2 : EG^2 = HL : LG$ folgt, daß in einem rechtwinkligen Dreiecke die Quadrate der Katheten sich verhalten wie die Abschnitte der Hypotenuse.

§. 218.

Aufgabe.

Eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen Figur A ähnlich ist, und sich zu ihr verhält wie m : n.

Auflösung. Man suche die Seite eines Quadrats, welches sich zu dem Quadrat über einer Seite a der Figur A verhält wie m : n (§. 217).

Ist nun a' diese Seite, so zeichne man über ihr ein Vieleck A', das dem Vieleck A ähnlich ist (§. 197), so wird A' das verlangte Vieleck sein.

Beweis.

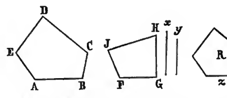
Es ist $A' : A = a'^2 : a^2$;
da aber $a'^2 : a^2 = m : n$,

so ist auch $A' : A = m : n$.

§. 219.

Aufgabe.

Eine Figur zu zeichnen, welche der Figur ABCDE ähnlich, und so groß ist als die Figur FGHJ.



Auflösung. Man verwandle die beiden Figuren ABCDE und FGHJ in Quadrate (§. 121). Es sei x die Seite des ersten und y die Seite des zweiten dieser Quadrate.

Nun suche man zu x, y und AB eine vierte Proportionale z, so wird diese die Seite sein, auf welcher man eine der ABCDE ähnliche Figur zu zeichnen hat, die alsdann der Figur FGHJ gleich sein wird.

Beweis.

Es sei R die über z gezeichnete, der ABCDE ähnliche Figur, so ist:

I. $ABCDE : R = AB^2 : z^2$ (§. 211).

Da nun ferner $x : y = AB : z$ (C.), so ist, wenn man diese Proportion mit sich selbst multiplicirt:

II. $x^2 : y^2 = AB^2 : z^2$.

Aus I. und II. aber folgt:

$ABCDE : R = x^2 : y^2$.

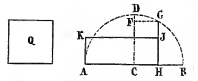
Da aber $ABCDE = x^2$ (C.), so muß auch $R = y^2$ sein (§. 167, II. Zus. 3).

Und weil $y^2 = FGHJ$, so muß auch $R = FGHJ$ sein.

§. 220.

Aufgabe.

Ein Rechteck zu zeichnen, das einem gegebenen Quadrat Q an Größe gleich ist, und dessen anliegende Seiten zusammen einer gegebenen Linie AB gleich sind.

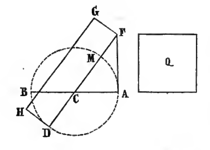


Auflösung. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, und errichte in der Mitte C von AB ein Loth CD. Nun trage man auf CD die Seite des gegebenen Quadrats = CF, ziehe FG mit AB parallel und fälle das Loth GH auf AB, so wird durch dieses die Linie AB in zwei Abschnitte AH und HB getheilt, welches die Seiten des verlangten Rechteckes AHJK sein werden (§. 100, 3).

§. 221.

Aufgabe.

Ein Rechteck zu zeichnen, welches einem gegebenen Quadrat Q an Inhalt gleich ist, und dessen Seiten um AB von einander verschieden sind.



Auflösung. Man beschreibe um AB einen Kreis.

In dem Endpunkte A errichte man eine Senkrechte AF, gleich der Seite des gegebenen Quadrats.

Hierauf ziehe man aus F durch den Mittelpunkt C des Kreises die Secante FD, so wird das Rechteck DFGH aus FD und FM das verlangte Rechteck sein.

Beweis.

Es ist das Quadrat über AF gleich dem Rechteck aus FD und FM (§. 207. a, 3).

Der Unterschied zwischen FD und FM aber ist MD = AB.

Zehnter Abschnitt.

Von den regulären Vielecken und der Kreismessung.

§. 222.

Erklärung.

Ein Dreieck, Viereck, Vieleck heißt regelmäßig oder regulär, wenn seine Seiten und Winkel alle einander gleich sind.

§. 223.

Zusätze.

1) In einem regulären n Eck ist der Umfang das n fache einer Seite.

2) In einem regulären n Eck ist jeder der gleichen Winkel

$$= \frac{(n-2)\,2\,R}{n} \text{ (§. 68, Anmerkung);}$$

also im regulären

3 Eck,	4 Eck,	5 Eck,	6 Eck,	7 Eck,	8 Eck,	
$^2/_3$ R,	1 R,	$^6/_5$ R,	$^4/_3$ R,	$^{10}/_7$ R,	$^3/_2$ R,	ꝛc.
oder 60°,	90°,	108°,	120°,	$128^4/_7$°,	135°,	

3) Zwei reguläre Vielecke von gleich vielen Seiten sind ähnlich; wenn z. B. zwei Fünfecke regulär sind, so ist jeder Winkel, in dem einen wie in dem andern, gleich $^6/_5$ R, und da die Seiten des einen Fünfecks unter sich gleich sind und eben so auch die Seiten des andern Fünfecks, so haben also je zwei Seiten beider Fünfecke dasselbe Verhältniß; d. h. die Fünfecke sind ähnlich (§. 190, a).

§. 224.

Lehrsatz.

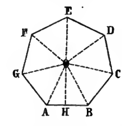
In jedem regulären Vielecke befindet sich ein Punkt, der von allen Seiten und Ecken desselben gleichweit entfernt ist.

Voraussetzung. Es sei ABCDEFG ein reguläres Vieleck.

Bewiesen soll werden, daß sich innerhalb desselben ein Punkt befinde, der von allen Seiten und Ecken desselben gleich weit absteht.

Beweis.

Man halbire zwei Winkel des Vielecks, z. B. A und B, so werden die Halbirungslinien sich in einem Punkt O schneiden.



Nun ziehe man die Linien OC, OD, OE, OF, OG, so wird durch diese das Vieleck in congruente Dreiecke zertheilt. Die Congruenz der zwei Dreiecke GAO und BAO erhellt aus §. 41; es ist daher auch der Winkel ABO = Winkel AGO. Da aber ABO die Hälfte des Vielecks-Winkels B ist (C.), so ist auch AGO die Hälfte des Vielecks-Winkels G, und dieser wird daher durch OG halbirt. Die Dreiecke AGO und FGO sind also auch congruent (§. 41). Nun beweist man auf dem angedeuteten Wege fort, daß auch die Winkel F, E, D und C durch die Linien OF, OE, OD und OC halbirt werden, woraus sich dann leicht die Congruenz der übrigen Dreiecke ergibt. Aus dieser Congruenz aber folgt die Gleichheit der Linien OA, OB, OC, OD, OE ꝛc. ꝛc.; die Endpunkte A, B, C, D, E ꝛc. ꝛc. sind also alle gleich weit von dem Punkt O entfernt.

Ein aus O mit der Eröffnung AO beschriebener Kreis wird also durch alle Endpunkte des Vielecks gehen, und da die Seiten des regulären Vielecks Sehnen in diesem Kreise und einander gleich sind, so stehen auch sie von dem Punkt O gleich weit ab (§. 136).

Anmerkung. Den Punkt O nennt man den Mittelpunkt des regulären Vielecks; seine Entfernung OB von einem Endpunkt desselben heißt der große, und seine Entfernung OH von den Seiten des Vielecks der kleine Halbmesser.

§. 225.

Zusätze.

1) Um jedes reguläre Vieleck kann ein Kreis beschreiben werden, so daß alle Eckpunkte in die Peripherie desselben fallen, und alle Seiten Sehnen in demselben sind.

2) In jedes reguläre Vieleck kann ein Kreis beschrieben werden, der alle Seiten des Vielecks berührt.

3) Da durch drei Punkte nur Eine Kreislinie möglich ist, so folgt, daß nur Ein Kreis um und nur Ein Kreis in ein reguläres Vieleck beschrieben werden kann.

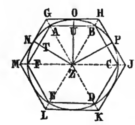
4) Der Mittelpunkt eines regulären Vielecks wird gefunden, wenn man entweder zwei Winkel desselben halbirt, oder wenn man zwei auf ein-

ander folgende Seiten desselben halbirt, und in den Halbirungspunkten Senkrechte errichtet.

§. 226.

Lehrsatz.

Halbirt man die Seiten eines regulären Vielecks, um welches ein Kreis beschrieben ist; zieht man ferner von dem Mittelpunkt des Kreises durch die Halbirungspunkte gerade Linien (Radien) nach der Peripherie, und durch alle Endpunkte dieser Geraden Tangenten an den Kreis, so bilden diese ein um den Kreis beschriebenes reguläres Vieleck von eben so viel Seiten als das eingeschriebene.



Voraussetzung. ABCDEF ist ein reguläres Vieleck, dessen Mittelpunkt Z. Man hat aus Z durch die Halbirungspunkte T, U, u. s. w. der Vielecksseiten die Radien ZN, ZO, ZP 2c. 2c., und durch die Endpunkte dieser Radien Tangenten an den Kreis gezogen.

Bewiesen soll werden, daß das dadurch entstehende umschriebene Vieleck regulär ist.

Beweis.

Man ziehe ZG, ZH, ZJ, ZK 2c. 2c. Nun sind die Dreiecke ZNG, ZOG congruent (§. 55, 4); mithin ist der Winkel NZG = W. OZG; der W. NZO wird also durch die Linie ZG halbirt. Zieht man ferner AZ, BZ, CZ 2c. 2c., so sind die Dreiecke TZA und UZA congruent (§. 55, 4), also auch Winkel TZA = W. UZA. Der Winkel TZU, oder was dasselbe ist, der W. NZO, wird also auch durch die Linie AZ halbirt, folglich fallen die Linien ZG und AZ in eine einzige zusammen.

Auf eben diese Art beweist man auch, daß die Linien ZH und BZ, ZJ und CZ 2c. 2c. zusammen fallen.

Da nun sowohl die Linie AB, als auch die Linie GH, senkrecht auf ZO stehen (§. 134, §. 141), so sind sie parallel (§. 32, b); aus denselben Gründen sind auch BC und HJ, CD und JK, DE und KL 2c. 2c. parallel.

Man hat also in dem Dreieck GHZ

$AB : GH = ZB : ZH$; und im Dreieck HJZ

$BC : HJ = ZB : ZH$

also auch $AB : GH = BC : JH$;

da aber $AB = BC$ (V.),

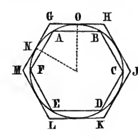
so ist auch $GH = HJ$ (§. 167, II, Zus. 3).

Die Seiten des umschriebenen Vielecks sind also gleich. Nun sind ferner die Winkel des innern Vielecks den Winkeln des äußern beziehungsweise gleich (§. 33, 1); da aber die Winkel des innern Vielecks unter sich gleich sind, so sind auch die Winkel des äußern Vielecks unter sich gleich. Es ist also das äußere Vieleck regulär.

§. 227.

Lehrsatz.

Die Länge der Kreislinie ist ist immer größer als der Umfang des eingeschriebenen, aber kleiner als der Umfang des umschriebenen regulären n Ecks, so groß auch n sein mag.



Voraussetzung. ABCDEF ist ein in den Kreis beschriebenes, GHJKLM ein um den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck.

Bewiesen soll werden, 1) daß der Umfang des eingeschriebenen Vielecks kleiner, und 2) der Umfang des umschriebenen Vielecks größer ist, als die Länge der Kreislinie.

Beweis.

1) Die Sehne AB ist kleiner als der Bogen AB (§. 50, 4), also auch 6 mal die Sehne AB kleiner als 6 mal der Bogen AB, d. i. der Umfang des Sechsecks ABCDEF kleiner als die Länge der Kreislinie.

2) NG + GO ist größer als der Bogen NO (§. 50; 3, 5), mithin auch 6 $\times$ (NG + GO) größer als 6 mal Bogen NO, d. h. der Umfang GHJKLM größer als die Länge der Kreislinie.

§. 228.

Zusatz.

Daß der Inhalt der Kreisfläche immer größer ist als der Flächeninhalt des eingeschriebenen, und kleiner als der Flächeninhalt des umgeschriebenen, regulären n Ecks, lehrt der bloße Anblick der Figur.

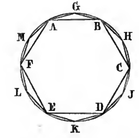
§. 229.

Lehrsatz.

Halbirt man die Bogen eines in den Kreis beschriebenen regulären n Ecks und verbindet die Endpunkte der erhaltenen Bogen-

hälften durch Sehnen, so bilden diese ein in den Kreis beschriebenes reguläres 2 n Eck.

Beweis.



Es ist ABCDEF ein in den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck. Halbirt man nun die Bogen AB, BC, CD, EF 2c. in den Punkten G, H, J, K 2c. und zieht die Sehnen AG, GB, BH, HC 2c., so bilden diese ein in den Kreis beschriebenes Zwölfeck. Da nun die Bogen AB, BC 2c. einander gleich sind (§. 129, 1), so sind auch ihre Hälften AG, GB, BH, HC 2c. und folglich auch die Sehnen AG, GB, BH, HC 2c. 2c. einander gleich (§. 129, 2). Da ferner auch die Winkel AGB, BHC, CJD 2c. 2c. alle einander gleich sind (§. 146, 1), so ist also das Zwölfeck AGBHC 2c. regulär.

§. 229. a.

Zusatz.

Der Umfang des eingeschriebenen regulären 2 n Ecks ist größer als der des eingeschriebenen n Ecks. Denn weil $AG + GB > AB$, so ist auch $6 \times (AG + GB) > 6\ AB$; d. h. der Umfang des eingeschriebenen Zwölfecks ist größer als der des eingeschriebenen Sechsecks.

§. 230.

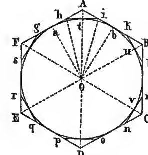
Lehrsatz.

Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit allen Eckpunkten, eines um denselben beschriebenen regulären n Ecks durch Gerade, und zieht durch die Durchschnittspunkte dieser letzteren mit der Peripherie Tangenten, so entsteht ein um den Kreis beschriebenes reguläres 2 n Eck.

Beweis.

Es sei ABCDEF ein um den Kreis beschriebenes reguläres Sechseck; nun ziehe man OA, OB, OC 2c. 2c. und ziehe an die Durchschnittspunkte t, u, v 2c. 2c. die Tangenten hi, kl, mn 2c. 2c., so entsteht dadurch das hiklmnopqrsg.

Man betrachte das Stück aAb vom Umfang des umschriebenen Sechs-



eck, und das dazu gehörige Stück ahib vom Umfang des umschriebenen Zwölfecks.

Da die Dreiecke aOA und bOA congruent sind (§. 55, 4), so sind die Winkel aOA und bOA, folglich auch die Bogen und Sehnen at und bt gleich (§. 127, 129, 2).

Nun sind ferner auch die Dreiecke aOh und hOt congruent (§. 55, 4), folglich auch W. aOh = W. hOt.

Ebenso folgt aus der Congruenz der Dreiecke tOi und iOb die Gleichheit der Winkel tOi und iOb; da aber auch die Winkel aOA und bOA gleich sind, so sind auch ihre Hälften einander gleich, d. i. Winkel aOh = hOt = tOi = iOb. Die Dreiecke aOh, hOt, tOi und iOb sind alle congruent; mithin auch die Seiten ah, ht, ti und ib.

Aus der Congruenz der Dreiecke aht und tib folgt endlich auch die Gleichheit der Winkel aht und tib.

In dem Umfangsstück ahib sind also die Stücke ah, ht, ti und ib und die Winkel aht und tib gleich.

Nun besteht der Umfang des ganzen umschriebenen Zwölfecks aus sechs solchen Umfangsstücken wie ahib.

Von jedem derselben kann auf die nämliche Art das Nämliche bewiesen werden, was von dem Stück ahib bewiesen wurde. Daraus aber folgt dann, daß das umschriebene Zwölfeck regulär ist.

§. 230. a.

Zusatz.

Der Umfang des umschriebenen 2nEcks ist kleiner als der Umfang des umschriebenen nEcks. Denn weil

$$hi < Ah + Ai,$$

so ist auch $ah + hi + ib < ah + Ah + Ai + ib$,

d. h. $ahib < aAb$,

mithin auch $6 \times ahic < 6 \times aAb$,

d. h. der Umfang des umschriebenen Zwölfecks ist kleiner als der des umschriebenen Sechsecks.

§. 230. b.

Zusatz.

Daß der Inhalt eines eingeschriebenen 2 n Ecks dem Inhalt der Kreisfläche näher kommt als der Inhalt des eingeschriebenen n Ecks; ebenso, daß der Inhalt des umschriebenen 2 n Ecks der Kreisfläche näher kommt, als der Inhalt des umschriebenen n Ecks, lehrt der bloße Anblick der Figur.

§. 231.

Zusatz.

Da also die Kreislinie immer größer ist als der Umfang des eingeschriebenen, und kleiner als der Umfang des umschriebenen regulären n Ecks (§. 227), so groß man auch n nehmen mag, so ist mithin der Kreis die gemeinschaftliche Grenze, welcher sich beide Umfänge, bei der Vergrößerung von n, fortwährend nähern, ohne sie zu erreichen.

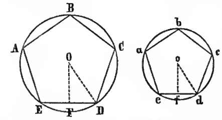
In diesem Falle nähern sich auch die Inhalte der beiden n Ecke fortwährend dem jedesmal zwischen ihnen liegenden Inhalt der Kreisfläche.

Man sagt daher, wenn n eine unendlich große Zahl bedeute, so falle sowohl der Umfang des ein- als auch des umschriebenen n Ecks mit dem Umfang der Kreislinie zusammen, und ebenso der Inhalt des ein- und des umschriebenen n Ecks mit dem Inhalt des Kreises. In diesem Sinne kann man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

§. 232.

Lehrsatz.

Die Umfänge zweier regulären Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich zu einander, sowohl wie die Halbmesser der eingeschriebenen als auch der umschriebenen Kreise.



Voraussetzung. ABCDE und abcde sind zwei reguläre Fünfecke, deren Mittelpunkt O und o sind.

Die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise (die kleinen Halbmesser) sind also die Lothe OF und of (§. 224) und die Halbmesser der umschriebenen Kreise (die großen Halbmesser) die Linien OD und od.

Bewiesen soll werden, daß
Umfang ABCDE : Umfang abcde = OF : of
= OD : od.

Beweis.

Da ABCDE und abcde ähnliche Vielecke (§. 233, 3),
so ist Umfang ABCDE : Umfang abcde = ED : ed (§. 192);
und da wegen der ähnlichen Dreiecke EDO und edo
ED : ed = OD : od,

so ist Umfang ABCDE : Umfang abcde = OD : od;
und weil ferner wegen der ähnlichen Dreiecke FDO und fdo
OD : od = OF : of,

so ist Umfang ABCDE : Umfang abcde = OF : of.

§. 233.

Zusätze.

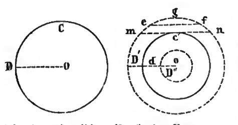
1) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser (also auch wie ihre Durchmesser) (§. 231).

* Anmerkung. Dieser Satz läßt sich auch unabhängig von der in §. 231 ausgesprochenen Ansicht auf folgende Art erweisen:

Es seien C und c die Umfänge zweier Kreise, deren Halbmesser DO und do.

Bewiesen soll werden, daß C : c = DO : do.

Angenommen, die Proportion C : c = DO : do sei unrichtig und es verhalte sich C : c = DO : D′o, wo D′o größer als do. Nun beschreibe man mit dem Halbmesser D′o einen Kreis, der mit dem Kreis C concentrisch sein wird. Legt man nun durch einen Punkt der Kreislinie c eine Tangente mn, so wird diese von dem äußeren Kreis einen Bogen mgn abschneiden.



Man nehme nun irgend einen genauen Theil der äußeren mit c concentrischen Kreislinie, der aber kleiner ist als der Bogen mgn. Dieser genaue Theil sei der Bogen egf. Zieht man nun die Sehne ef, so wird sich vermittelst dieser ein reguläres Vieleck in den äußern Kreis einschreiben lassen, welches den Umfang des inneren Kreises c nicht erreicht.

Nun verzeichne man in den Kreis C ein reguläres Vieleck von eben so vielen

Seiten als das vorige, und bezeichne die Umfänge dieser beiden Vielecke durch P und P′, so hat man

$$P : P' = DO : D'o \text{ (§. 232).}$$

Da aber auch $C : c = DO : D'o$ nach der Annahme,

so würde daraus folgen: $C : c = P : P'$.

Dieses ist unmöglich, weil C größer als P und c kleiner als P′. In der Proportion $C : c = DO : D'o$ darf also D′o nicht größer sein als do.

Es verhalte sich also $C : c = DO : D''o$, wo D″o kleiner als do.

Man beschreibe nun aus o mit D″o einen Kreis und denke sich um diesen ein reguläres Polygon V′ beschrieben, dessen Umfang die Kreislinie c nicht erreiche. Um C denke man sich ein reguläres Polygon V von derselben Seitenzahl beschrieben. Nun ist

$$V : V' = DO : D''o$$

und da $C : c = DO : D''o$,

so ist $C : c = V : v'$,

welche Proportion unmöglich ist, weil C kleiner als V, c aber größer als V′ ist.

In der Proportion, deren drei ersten Glieder C, c und DO sind, kann also das vierte weder größer noch kleiner als do sein. Man hat also $C : c = DO : do$.

2) **Zwei Kreisbogen, welche zu gleichen Centri-Winkeln gehören, verhalten sich wie ihre Halbmesser oder Durchmesser.**

Es seien C, c zwei Kreislinien, deren Halbmesser R, r; und w sei ein Centri-Winkel, zu welchem im ersten Kreis der Bogen A, im zweiten Bogen a gehöre, so ist

1) $C : c = R : r$,

ferner $C : A = 4 \text{ Rechte} : w$
und $c : a = 4 \text{ Rechte} : w$ } (§. 197, b),

also 2) $C : c = A : a$;

aus 1) und 2) aber folgt:

$$A : a = R : r$$

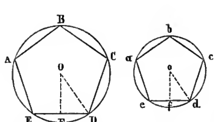
und auch $A : a = 2R : 2r$ u. s. w.

§. 234.

Lehrsatz.

Die Flächen zweier regulären Vielecke von gleichvielen Seiten verhalten sich, wie die Quadrate der Halbmesser sowohl der eingeschriebenen als der umschriebenen Kreise.

Voraussetzung. ABCDE und abcde sind zwei reguläre Fünfecke; O und o ihre Mittelpunkte, OF und of ihre kleinen und OD und od ihre großen Halbmesser.



Bewiesen soll werden, daß

Fläche ABCDE : Fläche abcde $=$ OD² : od² $=$ OF² : of².

Beweis.

Da ABCDE und abcde ähnliche Vielecke sind (§. 223, 3), so ist ABCDE : abcde $=$ ED² : ed² (§. 211); wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke EDO und edo ist aber auch

ED : ed $=$ OD : od, also auch
ED²: ed² $=$ OD² : od², mithin

1) ABCDE : abcde $=$ OD² : od².

Und weil die Dreiecke FDO : fdo ähnlich sind; so ist:

OD : od $=$ OF : of, also auch
OD² : od² $=$ OF² : of², mithin

2) ABCDE : abcde $=$ OF² : of².

§. 235.

Zusätze.

1) Zwei Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser (also auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser) (§. 231).

Anmerkung. Auch dieser Satz läßt sich, fast ganz so wie in §. 233, Anmerkung, beweisen.

2) Zwei Kreissectoren, die zu gleichem Centri-Winkel gehören, verhalten sich ebenfalls zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Es seien F, f zwei Kreisflächen, deren Halbmesser R und r, und w ein Centri-Winkel, zu welchem im ersten Kreis des Sector S, im zweiten der Sector s gehöre. Nun ist

1) $F : f = R^2 : r^2$.
Ferner $F : S = 4$ Rechte : w
und $f : s = 4$ Rechte : w.

also 2) $F : f = S : s$.

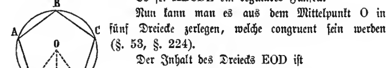
Aus 1) und 2) aber folgt

$S : s = R^2 : r^2$, u. s. w.

§. 236.

Lehrsatz.

Der Inhalt eines regulären Vielecks wird gefunden, wenn man den Umfang mit dem kleinen Halbmesser multiplicirt und von dem erhaltenen Produkt die Hälfte nimmt.



Es sei ABCDE ein reguläres Fünfeck.

Nun kann man es aus dem Mittelpunkt O in fünf Dreiecke zerlegen, welche congruent sein werden (§. 53, §. 224).

Der Inhalt des Dreiecks EOD ist

$$\frac{ED \times FO}{2} \quad (\S.\ 205,\ 2)$$

folglich der Inhalts des Fünfecks,

$$5 \times \frac{ED \times FO}{2} = \frac{5 \, . \, ED \times FO}{2}$$

Da aber 5 . ED der Umfang des Fünfecks, so findet man also den Inhalt dieses letztern, wenn man seinen Umfang mit dem kleinen Halbmesser multiplicirt und das Produkt durch 2 dividirt.

§. 237.

Zusatz.

1) Der Inhalt eines Kreises wird also gefunden, wenn man die Länge der Peripherie mit dem Radius multiplicirt und die Hälfte nimmt (§. 231).

2) Der Inhalt eines Sectors wird gefunden, wenn man die Länge seines Bogens mit dem Radius multiplicirt und die Hälfte nimmt. Ist nämlich C die Kreislinie, R der Halbmesser, S ein Sector, dessen Bogen A und dessen Mittelpunkts-Winkel w heiße, so ist

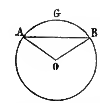
$$\frac{C \times R}{2} : S = 4 \text{ Rechte} : w.$$

$$\text{Ferner} \quad C \; : \; A = 4 \text{ Rechte} : w,$$

$$\text{also} \quad \frac{C \times R}{2} : C = S : A,$$

aus welcher Proportion man für S den Werth $\frac{A \times R}{2}$ erhält.

3) Der Inhalt eines Segments z. B. AGB wird gefunden, wenn man zuerst den Inhalt des Sectors AGBO findet, und alsdann den Inhalt des Dreiecks ABO davon abzieht.



Anmerkung 1. Verlängert man die Seite AB eines in den Kreis beschriebenen regulären n Ecks, und trägt auf diese Verlängerung die Seite AB noch (n — 1) mal auf, so ist die dadurch entstandene Linie AM das nfache von AB, also gleich dem Umfange des regulären n Ecks. Zieht man nun aus O nach den einzelnen Theilpunkten von AM gerade Linien, so entstehen dadurch n Dreiecke ABO, BOJ, JOD ꝛc., die, weil sie alle mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe haben, denselben an Flächeninhalt gleich sind (§. 95). Der Gesammtinhalt aller n Dreiecke über AM, oder, was dasselbe ist, der Inhalt des Dreiecks AOM ist also gleich n mal dem Inhalt des Dreiecks AOB (§. 236), oder gleich dem Inhalt des regulären n Ecks. Der Inhalt eines solchen n Ecks ist also gleich einem Dreiecke, das seinen Umfang zur Grundlinie und den kleinen Halbmesser zur Höhe hat.

Ist n unendlich groß, so ist das n Eck ein Kreis, der kleine Halbmesser ist gleich dem großen und man kann nun sagen: der Inhalt des Kreises sei dem eines Dreiecks gleich, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Ebenso läßt sich zeigen, daß der Inhalt eines Kreissectors dem eines Dreiecks gleich sei, welches den Bogen des Sectors zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Anmerkung 2. Man vergesse nicht, daß bei den unter §§. 236 und 237 vorkommenden Multiplicationen die Kreislinie, der Bogen und der Radius durch ein gemeinschaftliches Maß gemessen sein müssen, und daß man nicht diese Linien selbst, sondern ihre Maßzahlen (ganze oder gebrochene Zahlen) mit einander multiplicirt, und daß die Zahl, welche man durch dieses Multipliciren erhält, der Inhalt der Kreisfläche und des Kreissectors ist, unter der Voraussetzung, daß das Quadrat des Linienmaßes zum Flächenmaße genommen wird.

§. 238.

Lehrsatz.

Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis ist in allen Kreisen dasselbe.

Beweis.

Es seien P und p die Peripherien irgend zweier Kreise und D und d die dazu gehörigen Durchmesser, so ist (nach §. 233, 1)

$$P : p = D : d;$$

also auch $P : D = p : d$,

oder auch $D : P = d : p$,

womit der behauptete Lehrsatz bewiesen ist.

§. 239.

Zusatz.

Wenn man also das Verhältniß des Durchmessers zur Länge der Peripherie einmal für einen Kreis in Zahlen gefunden hätte, so würde dieses Verhältniß auch für jeden andern Kreis gelten.

Archimedes fand, daß sich der Durchmesser zur Peripherie nahezu wie 7 zu 22 verhalte.

Adrianus Metius fand für eben dieses Verhältniß

113 : 355.

Setzt man den Durchmesser eines Kreises 1 =, so bezeichnet man die der Länge der Peripherie zugehörige Zahl gewöhnlich durch den griechischen Buchstaben π. Setzt man aber den Halbmesser = 1, so bezeichnet π die Länge der halben Peripherie.

Der Zählen-Werth für π kann nur durch eine mühsame Rechnung nährungsweise gefunden werden; er ist

3,14159 26535 89793 .....

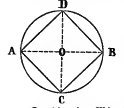
welche Zahl man, ihrem Berechner zu Ehren, die Ludolphische nennt.

Auflösung einiger Aufgaben, welche sich auf die §§. 222—234 beziehen.

§. 240.

Aufgabe.

Ein reguläres Viereck in einen Kreis einzuschreiben.



Auflösung. Man ziehe die beiden sich senkrecht durchschneidenden Durchmesser AB und DC und verbinde ihre Endpunkte A, D, B und C durch gerade Linien, so ist ADBC das verlangte reguläre Viereck.

Beweis.

Da die vier Mittelpunkts-Winkel Rechte sind, so sind die vier Kreisbogen AD, DB, BC und AC und daher auch die gleichnamigen Sehnen oder Seiten des Vierecks gleich.

Die Winkel ADB, DBC, BCA und CAD aber sind Rechte (§. 146, 3), also ebenfalls gleich. Das Viereck ist also regulär.

§. 241.

Zusatz.

Es erhellet leicht, wie man auch ein reguläres 8 —, 16 —, 32 —, 64 — ꝛc. ꝛc. Eck in einen Kreis einschreiben könne.

Und aus §. 226 ersieht man die Art, wie man um einen Kreis jedes der eben genannten regulären Vielecke beschreiben könne.

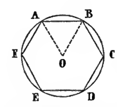
§. 242.

Aufgabe.

Ein reguläres Sechseck in einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man nehme den Halbmesser des Kreises zur Seite des einzuschreibenden regulären Sechsecks.

Beweis.



Es sei ABCDEF ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Sechseck, und O dessen Mittelpunkt.

Da nun der Mittelpunkt-Winkel AOB $= \frac{4}{6}$ R $= \frac{2}{3}$ R ist, so müssen die beiden andern Winkel OAB und OBA zusammen $\frac{4}{3}$ R betragen (weil $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$ R $= \frac{6}{3}$ R $= 2$ R). Da aber dieselben einander gleich sind (§. 43) so ist jeder $\frac{2}{3}$ R. Das Dreieck AOB ist also gleichseitig, mithin AB $=$ AO, d. h. die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks gleich dem Halbmesser des Kreises.

§. 243.

Zusatz.

Hieraus ergibt sich ferner, wie man sowohl in, als auch um einen Kreis ein reguläres 3 —, 6 —, 12 —, 24 —, 48 —, 96 — ꝛc. ꝛc. Eck beschreiben könne.

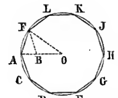
§. 244.

Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Zehneck einzuschreiben.

Auflösung. Man theile den Halbmesser AO des Kreises nach dem äußeren und mittleren Verhältniß (§. 199), so wird der größere Theil BO desselben die Seite des regulären Zehnecks sein.

Beweis.



AO : BO = BO : AB, so ist, wenn man die Sehne AF = BO macht, auch AO : AF = AF : AB.

Zieht man nun ferner FB und FO, so folgt aus §. 182 die Aehnlichkeit der Dreiecke AOF und ABF.

Es ist daher auch W. AFO = W. ABF;
da aber W. AFO = W. BAF,

so ist auch W. ABF = W. BAF,
mithin auch AF = BF (§. 45),
und weil AF = BO (Constr.),

so ist BF = BO,
also auch W. BFO = W. BOF.
Da aber auch W. BFA = W. BOF,
wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABF und AOF,

so ist auch W. BFO = W. BFA,
mithin der W. AFO halbirt.

Es ist also W. AOF = $\frac{1}{2}$ W. AFO = $\frac{1}{2}$ W. OAF
oder auch W. AFO = W. OAF = 2 × W. AOF,
mithin W. AFO + W. OAF + W. AOF = 5 × W. AOF,
da aber W. AFO + W. OAF + W. AOF = 2 R,

so ist auch 5 × W. AOF = 2 R,
also W. AOF = $\frac{2}{5}$ R = $\frac{4}{10}$ R.

Da nun der Mittelpunkts-Winkel in einem regulären Zehneck auch = $\frac{4}{10}$ R, so ist also O der Mittelpunkts-Winkel und AF die Seite und ACDEGHJKLF das in den Kreis einbeschriebene reguläre Zehneck.

§. 245.

Zusatz.

Hieraus ist zu ersehen, wie man in und um einen Kreis ein reguläres 5 —, 10 —, 20 —, 40 —, 80 —, 160 — ꝛc. ꝛc. Eck beschreiben könne.

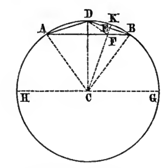
§. 246.

Lehrsatz.

In einem und demselben Kreise ist das Quadrat der Fünfecksseite gleich der Summe der Quadrate der Sechsecks- und Zehnecksseite.

Beweis.

Es sei AB die Seite des eingeschriebenen regulären Fünfecks. Fällt man nun aus dem Mittelpunkt C ein Loth auf AB, verlängert es bis an D in der Peripherie und zieht AD und BD, so sind diese Linien Seiten des eingeschriebenen regulären Zehnecks (§. 229) und bilden mit AB das gleichschenklige Dreieck ADB. Fällt man ferner aus C ein Loth CE auf DB, so halbirt dieses den Bogen DB in K und zieht man nach dem Durchschnittspunkt F die Linie DF, so ist auch DFB ein gleichschenkliges Dreieck (§. 55, a, 2).



Endlich ziehe man CA und CB, und HG parallel mit AB. — Da die beiden gleichschenkligen Dreiecke DFB und ADB den Winkel DBA gleich haben, so sind sie ähnlich (§. 186, 2). Da ferner der Bogen AK $= {}^3/_{20}$ des Umkreises (weil Bogen AD $= {}^1/_{10}$ und Bogen DK $= {}^1/_{20}$) und der Bogen AH ebenfalls $= {}^3/_{20}$ des Umkreises (weil Bogen DH $= {}^1/_4$ und Bogen AD $= {}^1/_{10}$), so ist Bogen AK = Bogen AH und mithin auch W. ACF = W. ACH; da aber W. ACH = W. FAC, so ist auch W. ACF = W. FAC, folglich $\triangle$ ACF gleichschenklig. Da aber auch $\triangle$ ACB gleichschenklig ist und die Dreiecke ACB und ACF den Winkel FAC gemeinschaftlich haben, so sind sie ähnlich (§. 186, 2). Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DFB und ADB folgt:

$$FB : DB = DB : AB \text{ oder } DB^2 = FB \times AB;$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACF und ACB folgt:

$$AF : AC = AC : AB \text{ oder } AC^2 = AF \times AB.$$

Hieraus folgt aber durch Addition:

$$AC^2 + DB^2 = (AF + FB)\ AB = AB^2.$$

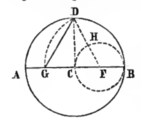
Da nun AC, als Halbmesser gleich der Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks (§. 242), so ist also das Quadrat der Fünfecksseite so groß als die Quadrate der Sechsecks- und Zehnecksseite.

Anmerkung. Hieraus ergibt sich 1) daß die Fünfecks-, Sechsecks- und Zehnecksseite ein rechtwinkliges Dreieck bilden (§. 101), und 2) ein leichtes Verfahren ein reguläres Fünfeck und Zehneck in den Kreis einzuschreiben, wie im Folgenden gelehrt werden soll.

§. 247.

Aufgabe.

Die Seiten des in einen gegebenen Kreis eingeschriebenen regulären Fünfecks und Zehnecks zu finden.



Auflösung. Auf dem Durchmesser AB errichte man im Mittelpunkte C eine Senkrechte CD, halbire den Halbmesser CB in F und beschreibe aus F mit FD den Kreisbogen DG, so ist DG die Sehne dieses Bogens gleich der Seite des eingeschriebenen Fünfecks und das Stück CG des Halbmessers ist gleich der Seite des eingeschriebenen Zehnecks.

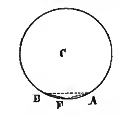
Beweis.

Beschreibt man mit FC einen Kreis, so schneidet dieser auf FD ein Stück HD ab, welches der größere Theil der stetig getheilten CD ist, weil $FC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} CD$ ist (§. 199), somit ist HD gleich der Seite des eingeschriebenen Zehnecks (§. 244). Da nun nach der Construktion $FG = FD$ und $FC = FH$ ist, so ist auch $CG = HD =$ der Seite des eingeschriebenen Zehnecks. Und da ferner der Halbmesser $CD =$ der Seite des eingeschriebenen Sechsecks ist, so die Gerade DG, welche mit CD und CG ein rechtwinkliges Dreieck bildet, gleich der Seite des eingeschriebenen Fünfecks (§. 246).

§. 248.

Aufgabe.

Ein reguläres Fünfzehneck in einen Kreis einzuschreiben.



Auflösung. Man ziehe von dem beliebigen Punkte A des Kreises um C die Sehne $AB =$ dem Halbmesser und von demselben Punkte aus die Sehne $AF =$ der Seite des eingeschriebenen Zehnecks, so ist BF die Seite des regulären Fünfzehnecks.

Beweis.

Da Bogen $AB = \frac{1}{6}$
„ „ $AF = \frac{1}{10}$ des Kreisumfangs,

so ist Bogen $FB = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ des Kreisumfangs; mithin FB die Sehne des regulären Fünfzehnecks.

§. 249.

Zusätze.

1) Man kann also auch ein reguläres 15 —, 30 —, 60 —, 120 — ꝛc. ꝛc. Eck in und um einen Kreis beschreiben.

2) Die Sätze der §§. 234—241 enthalten zugleich die Auflösung der Theilung einer Kreislinie auf rein geometrischem Wege.

§. 250.

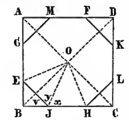
Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen.

Auflösung. ABCD sei das gegebene Quadrat. Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, schneide von jeder Ecke auf jeder Seite die halbe Diagonale ab, wodurch man die Schnittpunkte E, J, H, L ꝛc. ꝛc. erhält; ziehe GM, EJ, HL und FK, so ist JHLKFDGE das verlangte Achteck.

Beweis.

Da AD = AB als Quadratseiten, BG und DM gleich der halben Diagonale, so ist AG = AM, somit Dreieck GAM gleichschenklig und rechtwinklig, folglich die Winkel AGM und AMG je gleich 45° und deßhalb sind ihre Nebenwinkel MGE und GMF je gleich 135°; ebenso kann man zeigen, daß die übrigen Winkel des Achtecks 135° betragen; hieraus folgt, daß diese Figur gleichwinklig ist. Zieht man ferner EO, JO und HO, so entstehen die gleichschenkligen Dreiecke EOA, JOC und HOB, welche congruent sind, da ihre Spitzenwinkel je 45° betragen. Aus dieser Congruenz folgt die Gleichheit der Seiten EO, JO und HO. Da in den Dreiecken OHB und OJC die Spitzenwinkel 45° betragen, so sind die Winkel an der Grundlinie, wie leicht zu finden ist, je gleich $67\frac{1}{2}°$. Ist nun W. $x = 67\frac{1}{2}°$, so muß, da W. $v = 45°$, der W. $y = 67\frac{1}{2}°$ sein (§. 25, g). Da EO = JO = HO ist, so sind die Dreiecke EJO und JHO gleichschenklig; diese Dreiecke haben einen Schenkel gemeinschaftlich und die Winkel an der Grundlinie gleich, woraus sich ergibt, daß sie congruent sind (§. 42); hieraus folgt die Gleichheit von BJ und JH. In gleicher Weise zeigt man die Gleichheit von je zwei auf einander folgenden Seiten. Das Achteck ist somit auch gleichseitig, und da schon oben gezeigt wurde, daß es auch gleichwinklig ist, so ist es regelmäßig.



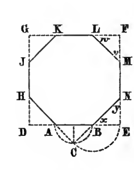
§. 251.

Aufgabe.

Ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen, wenn eine Seite gegeben ist.

Auflösung. Beschreibe über der gegebenen Seite das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC, verlängere AB nach beiden Seiten um AC = BC und zeichne über der erhaltenen Geraden DE das Quadrat DEFG; hierauf schneide man von jeder Ecke auf beiden Seiten Stücke gleich BC ab und ziehe BN, ML, KJ und HA, so ist ABNMLKJH das verlangte Achteck.

Beweis.



Die Dreiecke ABC, BEN, MLF 2c. 2c. sind rechtwinklig und gleichschenklig und da ihre Schenkel nach der Construktion gleich sind, so sind sie congruent, weßhalb AB = BN = ML = KJ = HA ist. Da ferner nach der Construktion AC = BC = BE = NE = FM 2c. 2c. ist, so müssen auch AB, MN, KL 2c. 2c. gleich sein (Grundſ. V.); hieraus ergibt sich die Gleichheit aller Seiten. Da die Dreiecke BEN, MPL, KGJ und HDA rechtwinklig und gleichschenklig sind, wie schon gezeigt wurde, so sind die Winkel x, y, v, w 2c. 2c. je gleich 45° und somit ihre Nebenwinkel d. i. die Winkel des Achtecks je gleich 135°. Ein gleichseitiges und gleichwinkliges Vieleck ist aber regelmäßig (§. 222).

§. 252.

Aufgabe.

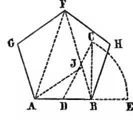
Ein regelmäßiges Fünfeck zu zeichnen, wenn eine Seite gegeben ist. -- .. (*)

Auflösung. Ist AB die gegebene Seite, so verlängere man sie nach §. 199, a. stetig, so daß man also erhält AE : AB = AB : BE; beschreibe über AB mit AE Kreuzbögen, von ihrem Schnittpunkt F und den Punkten A und B beschreibe man mit AB Kreisbögen, wodurch man die Punkte G und H erhält, endlich ziehe man BH, HF, FG und GA, so ist ABHFG das verlangte Fünfeck.

(*). Vedi per la costruzione approssimata del pentagono la Storia di Kästner e gli Annali di Gergonne. Tomo . . .

Beweis.

Zieht man die Diagonalen FA und FB so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABF, in welchem nach dem Beweis in §. 244 der Winkel an der Spitze $= {}^2/_5$ R $= 36^\circ$ und jeder an der Grundlinie gleich ${}^4/_5$ R $= 54^\circ$ ist. Macht man nun BJ $=$ BE und zieht AJ, so hat man in den Dreiecken ABF und JBA, da AE $=$ AF $=$ BF und BE $=$ BJ ist, BF : AB $=$ AB : BJ; diese Dreiecke haben aber auch den Winkel ABF gemeinschaftlich und sind daher ähnlich (§. 182). Aus dieser Aehnlichkeit folgt, daß das Dreieck JBA gleichschenklig, also AJ $=$ AB ist; ferner folgt, daß W. JAB $=$ AFB $= 36^\circ$, W. AJB $=$ W. BAF $= 72^\circ$ ist. Ist AJB $= 72^\circ$, so ist sein Nebenwinkel AJF $= 108^\circ$. Da, wie schon gezeigt, BAF $= 72^\circ$ und BAJ $= 36^\circ$ ist, so muß JAF $= 36^\circ$ sein. In dem Dreieck AFJ ist wie schon bekannt AFJ $= 36^\circ$, somit ist es gleichschenklig. Da in den Dreiecken AGF, AJF und BHF AF $=$ BF, AJ $=$ AG $=$ GF $=$ JF $=$ FH $=$ BH ist, so sind diese Dreiecke congruent (§. 53), mithin W. G $=$ W. H $=$ W. AJF $= 108^\circ$; W. GAF $=$ W. GFA $=$ W. HFB $=$ W. HBF $=$ JAF $=$ JFA $= 36^\circ$; es betragen daher die W. GAB, ABH und GFH je 108°. Das entstandene Fünfeck hat also nicht nur gleiche Seiten, wie unmittelbar aus der Auflösung zu ersehen ist, sondern auch gleiche Winkel und ist deßhalb regelmäßig.



I. Anhang.

A. Aufgaben, die Verwandlung und Theilung der Figuren betreffend.

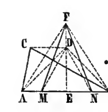
Aufgabe.

1. Ein Dreieck in ein anderes von gleichem Inhalt zu verwandeln, dessen Spitze in einem gegebenen Punkte liege, und dessen Grundlinie mit der des gegebenen in einerlei Gerade falle.

Auflösung. Da die Spitze des Dreiecks und die Lage der Grundlinie gegeben ist, so ist auch seine Höhe bekannt und die Auflösung geschieht also wie in §. 112.

Aufgabe.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges von gegebener Höhe zu verwandeln.

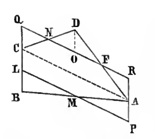


Auflösung. Ist ABC das gegebene Dreieck, so verwandle man es zuerst in ein gleichschenkliges Dreieck ABD von derselben Höhe (§. 110); hierauf errichte man in der Mitte E der Grundlinie das Loth EF gleich der gegebenen Höhe, ziehe FA und FB und mit diesen Geraden die Parallelen DM und DN, so erhält man, nachdem man noch FM und FN gezogen, MFN als das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ist leicht.

Aufgabe.

3. Ein gegebenes Viereck unmittelbar in ein Parallelogramm von demselben Inhalt zu verwandeln.

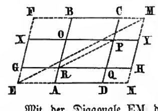


Auflösung. Es sei ABCD das gegebene Viereck. Man ziehe die Diagonale AC, halbire AB und CD in M und N, ziehe durch diese Punkte die Geraden PL und RQ parallel mit AC und durch A die Gerade PR parallel mit BC, so erhält man LQRP als das gesuchte Parallelogramm. Denn zieht man DO parallel mit BC, so läßt sich leicht beweisen, daß die Dreiecke OND und CNQ ARF und DOF, PMA und BML congruent sind, woraus folgt, daß

ABCD = LQRP.

Aufgabe.

4. Ein Parallelogramm soll in ein anderes, gleichgroßes verwandelt werden, dessen Grundlinie gegeben und der des gegebenen Parallelogramms parallel ist.



Auflösung. Es sei ABCD das gegebene Parallelogramm und GH die mit BC parallele Grundlinie des gesuchten. Man verlängere die Seiten des Parallelogramms ABCD und ziehe durch G und H mit AB die Parallelen EF und NM, so entsteht das Parallelogramm ENMF.

Mit der Diagonale EM desselben ziehe man RP parallel und hierauf durch P mit GH die Parallele XY, so ist GXYH das gesuchte Parallelogramm.

Denn weil die Dreiecke ENM und RQP ähnlich sind, so verhält sich

$$RQ : QP = EN : NM$$

oder $AD : HY = GH : DC$

also 1) $AD \times DC = GH \times HY$.

Da nun die Dreiecke ADC und GHY bei D und H gleiche Winkel haben, so hat man

2) $\triangle ADC : \triangle GHY = AD \times DC : GH \times HY$ (§. 308).

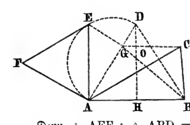
Aus 1) und 2) aber folgt:

$$\triangle ADC = \triangle GHY$$

und hieraus Par. $ABCD =$ P. GXYH.

Aufgabe.

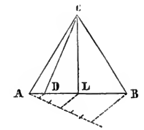
5. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.



Auflösung. Es sei ABC das gegebene Dreieck. Man beschreibe über AB das gleichseitige Dreieck ABD, ziehe aus C mit AB die Parallele CG, und suche zu AD und AG die mittlere geometrische Proportionale AE, so ist diese die Seite und AEF das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Denn $\triangle$ AEF : $\triangle$ ABD $=$ $AE^2 : AD^2$ (§. 209);
da aber AD : AE $=$ AE : AG,
so ist AE^2 $=$ AD $\times$ AG;
also $\triangle$ AEF : $\triangle$ ABD $=$ AD $\times$ AG : AD^2
$=$ AG : AD
$=$ OH : DH
$=$ $\triangle$ ABC : $\triangle$ ABD (§. 202, a);
folglich $\triangle$ AEF : $\triangle$ ABD $=$ $\triangle$ ABC : $\triangle$ ABD,
woraus $\triangle$ AEF $=$ ABC.

Aufgabe.



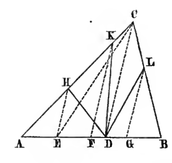
6. Ein Dreieck soll von der Spitze aus in drei Theile nach dem Verhältniß 1, 2, 3 getheilt werden.

Die Auflösung erhellt aus der Figur.

Aufgabe.

7. Ein gegebenes Dreieck soll aus einem Punkte, der in einer seiner Seiten liegt, in vier gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und D der Punkt in AB, aus welchem die Theilungslinien gezogen werden sollen.



Man theile AB in vier gleiche Theile, ziehe DC und mit dieser aus den Theilpunkten E, F, G die Parallelen EH, FK, GL. Endlich ziehe man DH, DK, DL, so wird durch diese Linien das Dreieck auf die verlangte Art getheilt.

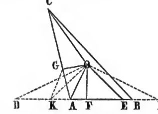
Zieht man nämlich CE, so ist $\triangle$ CHE $=$ $\triangle$ HED, mithin auch $\triangle$ CEA $=$ $\triangle$ HAD.

Da nun $\triangle$ CEA $= \frac{1}{4}$ ABC, so ist auch $\triangle$ HAD $= \frac{1}{4}$ ABC u. s. w.

Aufgabe.

8. Ein Dreieck soll aus einem innerhalb desselben liegenden Punkt in vier gleiche Theile getheilt werden.

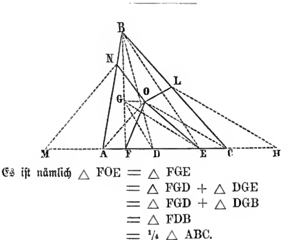
Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und O der innerhalb desselben gegebene Punkt. Man verwandle das $\triangle$ ABC in ein anderes DOH, das seine Spitze in O hat, theile dessen Grundlinie DH in K, F, E in vier gleiche Theile und ziehe die Theilungslinien OK, OF, OE. Die beiden OF und OE, welche ganz in das Dreieck ABCD fallen, bestimmen das Stück FOE $= \frac{1}{4}$ $\triangle$ DOH $= \frac{1}{4}$ $\triangle$ ABC. Man ziehe OA und mit dieser aus K die Gerade KG parallel; endlich ziehe man OG. Nun ist leicht zu erweisen, daß AGOF $=$ $\triangle$ KOF $= \frac{1}{4}$ $\triangle$ DOH $= \frac{1}{4}$ ABC u. s. w.



Aufgabe.

9. Ein Dreieck soll aus einem innerhalb desselben liegenden Punkte in vier gleiche Theile getheilt werden, so daß die erste Theilungslinie eine vorgeschriebene Richtung hat.

Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck, O der Punkt in seinem Innern, aus welchem die Theilungslinien gezogen werden sollen, und OF die erste Theilungslinie. Man ziehe BF und aus O mit AC die Parallele OG. Hierauf nehme man FD $= \frac{1}{4}$ AC, ziehe GD und mit dieser BE parallel, so ist OE die zweite Theilungslinie.



Es ist nämlich $\triangle$ FOE $= \triangle$ FGE

$= \triangle$ FGD $+ \triangle$ DGE

$= \triangle$ FGD $+ \triangle$ DGB

$= \triangle$ FDB

$= 1/4 \triangle$ ABC.

Man nehme ferner EH = FE; fällt nun der Punkt H innerhalb des Dreiecks, so ist OH die dritte Theilungslinie; fällt aber H außerhalb des Dreiecks, so ziehe man OC, hierauf mit dieser die HL parallel, so ist OL die dritte Theilungslinie.

Denn es ist $\triangle$ OCL $= \triangle$ OCH

mithin $\triangle$ OEC $+ \triangle$ OCL $= \triangle$ OEC $+ \triangle$ OCH

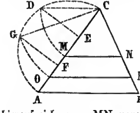
d. h. OECL $= \triangle$ OEH

$= \triangle$ FOE (§. 95.)

$= 1/4$ ABC u. s. w.

Aufgabe.

10. Ein Dreieck soll in drei gleiche Theile getheilt werden und zwar so, daß die Theilungslinien mit einer Seite parallel gehen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck, und AB die Seite, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen. Man theile AC in 3 gleiche Theile und suche erstlich zwischen AC und dem ersten Theile CE die mittlere geometrische Proportionale CD = CM; hierauf ziehe man MN parallel mit AB, so ist $\triangle$ CMN $= 1/3 \triangle$ ACB.

Denn $\triangle$ ABC : $\triangle$ CMN $= AC^2 : MC^2$

$= AC^2 : AC \times CE$

$= AC : CE$

$= \quad 3 : 1.$

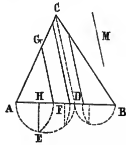
Man suche ferner zwischen AC und CF die mittlere Proportionale CG $=$ CO und ziehe OR mit AC parallel, so ist $\triangle$ COR $= \frac{2}{3}$ $\triangle$ ABC, mithin MNOR $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ ABC u. s. w.

Aufgabe.

11. Es soll ein Dreieck nach einem gegebenen Verhältniß getheilt werden, so daß die Theilungslinien mit einer Seite parallel gehen.

Aufgabe.

12. Ein Dreieck soll in vier gleiche Theile getheilt werden, so daß die Theilungslinien mit einer gegebenen Geraden parallel gehen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und M die Gerade, mit welcher die Theilungslinien parallel gehen sollen. Man ziehe CD parallel mit M. Hierauf theile man AB in 4 gleiche Theile, suche erstlich zwischen AD und dem ersten Theile AH die mittlere geometrische Proportionale AE $=$ AF, und ziehe FG parallel mit CD, so ist $\triangle$ AFG $= \frac{1}{4}$ ABC.

Denn es ist $\triangle$ ADC : $\triangle$ AFG $=$ AD² : AF²

$=$ AD² : AD $\times$ AH;

$=$ AD : AH;

ferner $\triangle$ ADC : $\triangle$ ABC $=$ AD : AB,

also $\triangle$ AFG : $\triangle$ ABC $=$ AH : AB;

$= 1 : 4$;

also $\triangle$ AFG $= \frac{1}{4}$ ABC u. s. w.

Aufgabe.

13. Es soll ein Dreieck nach einem gegebenen Verhältniß getheilt werden, so daß die Theilungslinien der Höhe des Dreiecks parallel sind.

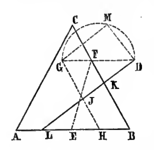
Aufgabe.

14. Ein Dreieck soll in drei gleiche Theile getheilt werden, so daß die eine Theilungslinie einer Geraden A und die andere einer Geraden B parallel sei.

Aufgabe.

15. Es ist ein Dreieck gegeben und außerhalb desselben ein Punkt. Man soll durch letzteren eine Gerade ziehen, welche von dem Dreieck einen bestimmten Theil, z. B. ein Drittheil abschneide.

Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und D der Punkt außerhalb desselben. Man ziehe durch D mit AB eine Parallele, welche die nächstliegende Seite BC in F trifft. Hierauf construire man ein Dreieck BFE $=$ $\frac{1}{3}$ ABC, das seine Spitze in F hat (§. 112) und verwandle dieses in ein Parallelogramm BFGH von gleicher Höhe. Ueber DG construire man einen Halbkreis, nehme in diesem die Sehne DM $=$ DF und ziehe MG. Endlich nehme man HL $=$ MG und ziehe DL, so wird durch letztere Gerade von dem Dreieck ABC der verlangte Theil abgeschnitten.



Wegen der ähnlichen Dreiecke DJG, HJL und DKF ist

$$\triangle DJG : \triangle DKF = DG^2 : DF^2$$

$$\triangle DJG - \triangle DKF : \triangle DJG = DG^2 - DF^2 : DG^2,$$
$$= DG^2 - DM^2 : DG^2,$$
$$= MG^2 : DG^2,$$
$$= HL^2 : DG^2;$$

da aber auch $\triangle HJL : \triangle DJG = HL^2 : DG^2$,

so ist also $\triangle DJG - \triangle DKF = \triangle HJL$,

oder $FGJK = \triangle HJL$,

und wenn man beiderseits BHJK hiezu addirt:

$$BHFG = \triangle BKL.$$

Da aber $BHFG = \triangle BFE = \frac{1}{3} \triangle ABC$,

so ist auch $\triangle BKL = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

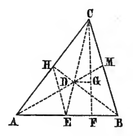
Anmerkung. Man kann dieses Verfahren mit geringer Abänderung auch anwenden, wenn D innerhalb des Dreiecks gegeben ist.

Aufgabe.

16. Aus einem außerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkte dasselbe in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Aufgabe.

17. Man soll innerhalb eines Dreiecks einen Punkt von solcher Lage finden, daß die aus ihm nach den Endpunkten des Dreiecks gezogenen Linien dasselbe in drei gleiche Theile theilen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck. Man halbire zwei Seiten AB und AC desselben in E und H, ziehe EC und HB, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden der gesuchte Punkt.

Denn zieht man HE, so ist HE parallel BC (§. 172) und

also $AB : AE = BC : HE;$

da aber $AE = \frac{1}{2} AB,$

so ist auch $HE = \frac{1}{2} BC.$

Und da, wegen der ähnlichen Dreiecke HED und BCD

$$BC : HE = CD : DE,$$

so ist auch $DE = \frac{1}{2} CD,$

mithin $DE = \frac{1}{3} CE.$

Ebenso wird bewiesen daß auch $DH = \frac{1}{3} BH.$

Fällt man nun aus C auf AB das Loth CF und zieht DG parallel mit AB, so ist

$$CE : DE = CF : GF,$$

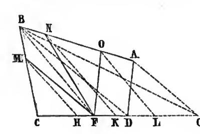
also $GF = \frac{1}{3} CF,$

mithin auch $\triangle ADB = \frac{1}{3} \triangle ACB.$

Ebenso beweist man, daß auch $\triangle ADC = \frac{1}{3} \triangle ACB$ u. s. w.

Aufgabe.

18. Man soll ein gegebenes Viereck aus einem in einer Seite liegenden Punkt in vier gleiche Theile theilen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABCD das gegebene Viereck und F der in der Seite CD liegende Punkt. Man verlängere CD über D hinaus, und ziehe AG mit der Diagonale BD parallel, so ist $\triangle$ BCG = ABCD. Nun theile man CG in 4 gleiche Theile, ziehe aus

den Theilpunkten H, K, L mit BF die Parallelen HM, KN, LO und endlich aus F die Geraden FM, FN, FO, so theilen letztere das Viereck auf die verlangte Art.

Denn es ist $\triangle$ FCM $=$ $\triangle$ BCH $=$ $^1/_4$ BCG $=$ $^1/_4$ ABCD;
BCFN $=$ $\triangle$ BCK $=$ $^2/_4$ BCG $=$ $^2/_4$ ABCD;
BCFO $=$ $\triangle$ BCL $=$ $^3/_4$ BCG $=$ $^3/_4$ ABCD rc.

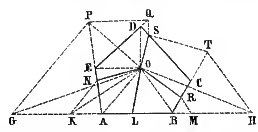
Aufgabe.

19. Ein Vieleck soll aus einem in einer seiner Seiten liegenden Punkt nach einem gegebenen Verhältniß getheilt werden.

Aufgabe.

20. Ein Vieleck soll aus einem innerhalb desselben liegenden Punkte in vier gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung und Beweis. Es sei ABCDE das gegebene Vieleck und O der Punkt innerhalb, aus welchem die Theilungslinien gehen sollen.



Man construire ein Dreieck GOH, das an Fläche dem Vieleck gleich ist, und welches seine Spitze in O hat. Die Grundlinie GH theile man in K, L und M in 4 gleiche Theile. Zieht man nun OL, OK und OM, so wird durch diese Geraden das Dreieck GOH in vier gleiche Theile getheilt (§. 96, 1). Da nun K außerhalb ABCDE liegt, so ziehe man KN parallel AO, alsdann ist, wenn man ON zieht, ALON $=$ $\triangle$ OLK $=$ $^1/_4$ $\triangle$ GOH $=$ $^1/_4$ ABCDE. Zieht man ferner GP parallel AO, bis sie die verlängerte AE in P trifft, hierauf aus P mit OE die Parallele PQ, bis sie die verlängerte ED in Q trifft, endlich aus Q die QS mit OD parallel, so ist wenn man OS zieht OLAEDS $=$ $^2/_4$ $\triangle$ HGO $=$ $^2/_4$ ABCDE. Denn denkt man sich QO gezogen, so ist

$\triangle$ ODQ $=$ $\triangle$ DOS

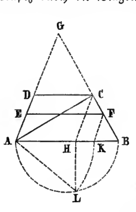
folglich $\triangle$ EQO $=$ EDSO.

Aber $\triangle$ EOQ = EOP,
also auch $\triangle$ EOP = EDSO,
und daher $\triangle$ POA = AOG;
mithin auch $\triangle$ LGO = OLAEDS u. s. w.

In Beziehung auf den Theilpunkt M verfährt man ähnlich wie bei K; wodurch die Theilungslinie OR erhalten wird. Durch OL, ON, OS und OR wird das Vieleck auf die verlangte Art getheilt. Um sich von der Richtigkeit der Construktion zu überzeugen, verfahre man in Beziehung auf den Punkt H wie bei G; trifft alsdann die aus T mit CO gezogene Parallele mit S zusammen, so ist richtig construirt worden.

Aufgabe.

21. Man soll ein Paralleltrapez durch eine mit den Parallelseiten gezogene Parallele so in zwei Theile theilen, daß dieselben beziehungsweise den beiden Dreiecken gleich seien, in welche das Trapez durch die Diagonale getheilt wird.



Auflösung und Beweis. Es sei ABCD das gegebene Paralleltrapez und AB und DC die Parallelseiten. Man ziehe CH parallel mit AD, so daß AH = DC, suche zwischen AB und AH die mittlere geometrische Proportionale AL, mache AK = AL, ziehe KF parallel mit AD und endlich durch F mit AB die Parallele EF, so wird das Paralleltrapez durch diese Linie auf die verlangte Art getheilt.

Denn es ist AB : AL = AL : AH, oder weil AL = AK = EF, und AH = DC ist,

AB : EF = EF : DC

Verlängert man nun AD und BC bis zu ihrem Durchschnitt in G, so ist ferner

AB : EF = GA : GE,
und EF : DC = GF : GC;
also auch GA : GE = GF : GC,
und mithin GA $\times$ GC = GE $\times$ GF.
Da aber $\triangle$ GAC : $\triangle$ GEF = GA $\times$ GC : GE $\times$ GF,
so ist $\triangle$ GAC = $\triangle$ GEF,

und also auch, wenn man beiderseits $\triangle$ GDC abzieht.

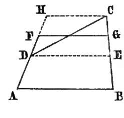
$$\triangle \text{ ADC} = \text{EDCF},$$

folglich $\triangle$ ABC = ABFE.

Anmerkung. Wenn also ein Paralleltrapez durch eine mit den Parallelseiten parallel gehende Gerade so getheilt wird, daß beide Theile beziehungsweise gleich sind den beiden Dreiecken, in welche das Trapez durch die Diagonale getheilt wird, so ist die Theilungslinie die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden Parallelseiten.

Aufgabe.

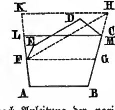
22. Man soll ein Trapezoid in ein Paralleltrapez verwandeln.



Auflösung. Es sei ABCD das gegebene Trapezoid. Man ziehe durch D und C mit AB die Parallelen DE und CH, welche die Seiten AD und BC, oder ihre Verlängerungen in E und H schneiden. Hierauf theile man das Paralleltrapez DECH auf die in Aufgabe 21 angegebene Art durch die Parallele FG in zwei Theile, so ist ABGF das verlangte Paralleltrapez.

Aufgabe.

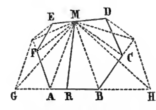
23. Man soll irgend eine geradlinige Figur in ein Paralleltrapez verwandeln.



Auflösung. Es sei ABCDEF ein Vieleck, das in ein Paralleltrapez verwandelt werden soll. Man schneide durch die Diagonale FC das Viereck ABCF ab, und verwandle den übrigen Theil FCDE in ein Dreieck FCH, dessen Grundlinie CH auf die Verlängerung von BC falle. Nun hat man also das Trapezoid ABHF, das nach Anleitung der vorigen Aufgabe in das Paralleltrapez ABML verwandelt wird.

Aufgabe.

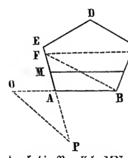
24. Man soll von einem Vieleck ein Stück abschneiden, das einer gegebenen Figur Q gleich sei, und zwar mittelst einer Theilungslinie, welche durch einen im Umfang des gegebenen Vielecks liegenden Punkt geht.



Auflösung und Beweis. Es sei ABCDEF das gegebene Vieleck und M der Punkt im Umfange, durch welchen die Theilungslinie gehen soll. Man verwandle das Vieleck in ein Dreieck GMH, von dem Punkt M aus, so nämlich, daß immer die nächst an M anliegende Ecke weggeschafft wird. Auf diese Art wird auf jeder Seite von M durch das Dreieck GMH so viel von dem Vieleck abgeschnitten, als auf eben dieser Seite wieder durch das Dreieck hinzukommt. Es ist also △ GMA = EMAF und BPH = MDCP. — Man verwandle nun die Figur Q ebenfalls in ein Dreieck und zwar in ein solches, das die Seite MG und den Winkel MGH enthält. Endlich mache man GR gleich der andern in diesem letzteren Dreieck den Winkel G einschließenden Seite und ziehe MR, so wird durch diese ein Stück MEFAR von dem gegebenen Vieleck abgeschnitten, welches der Figur Q an Fläche gleich ist.

Aufgabe.

25. Man soll von einem Vieleck ein gegebenes Stück abschneiden und zwar durch eine Theilungslinie, welche einer der Vielecksseiten parallel sei.



Auflösung und Beweis. Es sei ABCDE das gegebene Vieleck und AB die Seite, mit welcher die Theilungslinie parallel gehen soll. Man verwandle das abzuschneidende Stück in ein Dreieck OAP, dessen einer Winkel OAP gleich sei einem der an AB anliegenden Vieleckswinkel. Hierauf suche man zu AB, OA und PA die vierte Proportionale, nehme AF so groß als dieselbe, ziehe FG parallel mit AB und theile nun das Trapez ABGF durch die Parallele MN so, daß ABNM = △ ABF (Aufg. 21), so wird durch MN das verlangte Stück von ABCD abgeschnitten.

Denn AB : OA = PA : AF

also AB × AF = OA × PA.

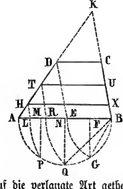
Und da △ ABF : △ OAP = AB × AF : OA × PA (§. 208),

so ist also △ ABF = △ OAP,

mithin auch ABNM = △ OAP.

Aufgabe.

26. Ein gegebenes Paralleltrapez soll in drei gleiche Theile getheilt werden und zwar so, daß die Theilungslinien mit den Parallelseiten parallel gehen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABCD das gegebene Trapez. Man ziehe DE parallel mit CB, construire über AB einen Halbkreis, nehme in diesem die Sehne $BG = BE$ und fälle aus G auf AB die Senkrechte GF. Nun theile man AF in M und N in drei gleiche Theile, errichte aus diesen Theilpunkten die Senkrechten MP und NQ, mache $BR = BQ$, $BL = BP$, ziehe aus R und L mit BC die Parallelen RT und LH, und aus H und T mit AB die Parallelen TU und HX, so wird durch letztere das Trapez auf die verlangte Art getheilt.

Man verlängere AD und BC bis zu ihrem Durchschnitt in K.

Nun hat man
$$\triangle KDC : \triangle KTU = DC^2 : TU^2 = BG^2 : BQ^2 = BA \,.\, BF : BA \,.\, BN = BF : BN.$$

Ebenso ist $\triangle KDC : \triangle KHX = BF : BM$

und $\triangle KDC : \triangle KAB = BF : BA,$

folglich auch $\triangle KDC : DCUT = BF : NF$

$DCXH : \triangle KDC = MF : BF$

$ABCD : \triangle KDC = AF : BF$

und also $DCHX : DCUT = MF : NF = 2 : 1$

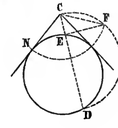
und $ABCD : DCUT = AF : NF = 3 : 1,$

d. h. das Paralleltrapez ABCD wird durch die Geraden TU und HX in drei gleiche Theile getheilt.

B. Aufgaben über Kreisberührungen.

Aufgabe.

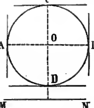
27. Man soll von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkt eine Tangente an denselben ziehen, ohne Anwendung der Centrallinie in §. 159.



Auflösung. Es sei C der außerhalb des Kreises gegebene Punkt. Man ziehe die Sekante CD, suche zwischen ihr und dem äußeren Segment CE die mittlere geometrische Proportionallinie CF, beschreibe mit dieser aus C einen Kreis, welcher den gegebenen in M und N schneidet, und ziehe CM und CN, so ist jede dieser Geraden die verlangte Tangente (§. 197, a).

Aufgabe.

28. Man soll an einen Kreis eine Tangente ziehen, die einer gegebenen Geraden parallel sei.



Auflösung. Es sei MN die gegebene Gerade. Man fälle aus dem Mittelpunkt O des Kreises ein Loth auf MN, das den Kreis in C und D schneide. Nun ist jedes der in C und D auf DC errichteten Perpendikel die verlangte Tangente.

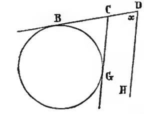
Aufgabe.

29. Man soll an einen Kreis eine Tangente ziehen, die senkrecht auf einer gegebenen Geraden stehe.

(S. die Figur zu Aufgabe 28.)

Aufgabe.

30. Man soll an einen Kreis eine Tangente ziehen, welche mit einer gegebenen Tangente desselben einen gegebenen Winkel macht.

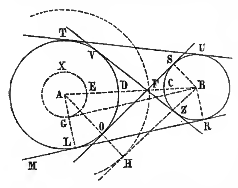


Auflösung. Es sei BD die gegebene Tangente. Man trage an einen beliebigen Punkt D derselben den Winkel BDH = dem gegebenen Winkel und ziehe nach Aufgabe 28 mit DH eine parallele Tangente an den Kreis; alsdann werden CB und CG den gegebenen Winkel einschließen.

Aufgabe.

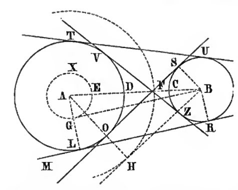
31. Eine Tangente an zwei gegebene außerhalb einander liegende Kreise zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Es seien die Kreise um A und B gegeben. Man ziehe die Centrallinie AB und nehme ED = CB, so daß AE gleich dem Unterschied der Halbmesser beider Kreise ist. Aus A beschreibe man mit AE den Kreis GEX und ziehe an diesen aus B die Tangente BG. Durch A und G ziehe man eine Gerade, welche den Kreis um A in L schneidet. Endlich ziehe man aus B mit AL eine Parallele, welche den Kreis um B in R schneidet, so sind L und R die beiden Berührungspunkte und LR die gesuchte Tangente. — Denn da BR parallel und gleich GL, und der Winkel bei G ein Rechter ist, so ist GLRB ein Rechteck, also die Winkel bei L und R Rechte, folglich LR eine Tangente an beiden Kreisen.



Es ist leicht einzusehen, daß noch eine zweite Tangente TU möglich ist, welche beide Kreise auf eine ähnliche Art wie LR nämlich auf einerlei Seite der Centrallinie berührt.

Man nehme nun ferner FD = CB, so daß AF gleich der Summe der



beiden Halbmesser AD und CB sei, und beschreibe aus A mit AF einen Kreis HFH. An diesen ziehe man aus B eine Tangente BH, verbinde den Berührungspunkt H mit A, und ziehe aus B die Parallele BS mit HA, so erhält man zwei neue Punkte O und S, welche gleichfalls die Berührungspunkte einer Tangente an den gegebenen Kreisen sind. Denn da BS parallel und gleich OH und der Winkel bei H ein Rechter ist, so ist OSBH ein Rechteck, folglich ꝛc. ꝛc. Diese neue Tangente OS berührt die beiden gegebenen Kreise auf verschiedenen Seiten der Centrallinie.

Es läßt sich aber noch eine Tangente VZ ziehen, welche beide Kreise auf eine ähnliche Art berührt, wie OS. Die Aufgabe hat also vier Auflösungen.

1. Anmerkung. Die beiden äußeren Tangenten schneiden sich (wie leicht zu erweisen) in einem Punkt der Centrallinie, den man den äußeren und die beiden inneren Tangenten in einem Punkt der Centrallinie, den man den inneren Aehnlichkeitspunkt beider Kreise nennt. Man nennt überhaupt Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise die beiden Punkte, ihrer Centrallinie, in denen sich die geraden Linien schneiden, welche die Endpunkte paralleler Halbmesser verbinden. Es läßt sich leicht beweisen, daß es für zwei ihrer Lage nach gegebene Kreise nie mehr als zwei Aehnlichkeitspunkte, einen innern und einen äußern, gebe.

Ueber die Aehnlichkeitspunkte und ihre merkwürdigen Eigenschaften findet man Näheres in Jakobi's Anhängen zu van Swinden's Geometrie; auch in Adams Lehre von den Transversalen u. a.

2. Anmerkung. An obige Aufgabe reiht sich folgender Lehrsatz an:

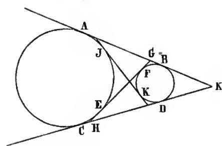
Legt man an zwei Kreise, welche aus einander liegen, die gemeinschaftlichen Tangenten, so sind

1) Die Abschnitte der beiden äußern zwischen den Berührungspunkten einander gleich;

2) Die Abschnitte der innern zwischen den äußernn Tangenten gleich den Abschnitten der äußern.

Zu beweisen ist (s. Fig. nächste Seite) AB $=$ CD, HG $=$ AB u. s. f.

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt aus der Construktion oder läßt sich mit §. 159, 1. leicht nachweisen. In Betreff der zweiten Behauptung hat man



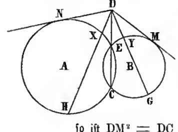
$HG = HF + FG$
$HG = HD + GB$ (§. 159, 1).
$HG = CH + AG$. Addirt man diese beiden Gleichungen,
so erhält man $2HG = HD + CH + GB + AG$
$= CD + AB$
$= 2CD$, folglich $HG = CD = AB$.

Aufgabe.

32. Es sind zwei Kreise gegeben; man soll die Punkte finden, von welchen aus gleich große Tangenten an die Kreise gezogen werden können.

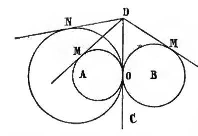
Auflösung. Es sind hier vier Fälle zu unterscheiden:

1) die Kreise schneiden sich,
2) die Kreise berühren sich,
3) die Kreise liegen ganz in einander,
4) die Kreise liegen ganz außerhalb einander.



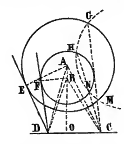
Im ersten Falle ziehe man die gemeinschaftliche Sekante CD, so können von jedem Punkt derselben, welcher außerhalb der Kreise liegt, zwei gleich große Tangenten an beide Kreise gezogen werden. Sind z. B. DM und DN Tangenten,

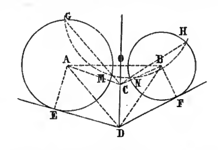
so ist $DM^2 = DC \times DE$
und $DN^2 = DC \times DE$ } §. 207, a. 3.
also $DM^2 = DN^2$
und $DM = DN$.



Im zweiten Falle ziehe man die gemeinschaftliche Tangente, so hat jeder Punkt derselben die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Im dritten und vierten Fall ziehe man einen Kreis, der beide gegebene Kreise schneidet und zwar den ersten um A in den Punkten G und M, den zweiten um B in den Punkten H und N; hierauf ziehe man die Secanten GM und HN, und fälle aus deren Durchschnitt C





ein Loth auf die Centrallinie AB oder deren Verlängerung, so haben alle Punkte dieses Lothes die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Ist nämlich R der Halbmesser des Kreises um A, und r der Halbmesser des Kreises um B,

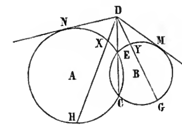
so ist $DE^2 = DA^2 - R^2$
und $DF^2 = DB^2 - r^2$.
Ferner ist $DA^2 = AO^2 + DO^2$
$DB^2 = BO^2 + DO^2$

mithin $DA^2 - DB^2 = AO^2 - BO^2$
$= CA^2 - CB^2$
$= CG \times CM + R^2 - (CH \times CN + r^2)$
$DA^2 - DB^2 = \quad R^2 \quad - r^2$

weil sowohl $CG \times CM$ also auch $CH \times CN$ gleich dem Quadrat einer und derselben aus C an den Kreis GNM gezogenen Tangente ist (§. 207. a. 3).

Also auch $DA^2 - R^2 = DB^2 - r^2$
oder $DE^2 = DF^2$
also $DE = DF$.

Zusätze.



1) Die Linie DC in den vier Figuren heißt die **Potenzlinie** der Kreise um A und B, weil die von irgend einem Punkt D derselben durch beide Kreise gezogenen Sekanten DH und DG mit ihren äußern Abschnitten DX und DY stets eine constante Potenz bilden, nämlich $DH \times DX = DG \times DY = DN^2$, wie auch die Sekanten gezogen sein mögen.

2) Die Mitten der vier Tangenten, welche an zwei außerhalb einander liegenden Kreisen gezogen werden können (Aufg. 31), liegen offenbar auf der Potenzlinie beider Kreise, mithin in einer und derselben Geraden.

Aufgabe.

33. Es sind drei Kreise gegeben, man soll in der Ebene derselben einen Punkt M so bestimmen, daß die sechs von diesem Punkt an die Kreise gezogenen Tangenten einander gleich werden.

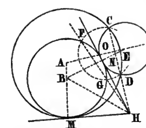
Auflösung. Es seien A, B und C die drei gegebenen Kreise. Man suche zu A und B, zu A und C, und endlich zu B und C die Potenzlinien, so werden diese drei Linien sich in Einem Punkte schneiden, welcher der gesuchte Punkt — der **Potenzpunkt** der drei Kreise — sein wird.

Ist nämlich M der Durchschnitt der Potenzlinien (A, B) und (A, C), so können also von M aus an die Kreise A, B und C gleiche Tangenten gezogen werden, mithin muß M auch auf der Potenzlinie von B und C liegen, d. h. die drei Potenzlinien (A, B), (A, C) und (B, C) gehen durch einen und denselben Punkt.

Aufgabe.

34. Es ist ein Kreis und zwei außerhalb desselben liegende Punkte gegeben. Man soll einen Kreis beschreiben, welcher den ersten berührt und durch die beiden Punkte geht.

Auflösung und Beweis. Es sei der Kreis um B der gegebene und C und D die beiden Punkte außerhalb desselben. Man ziehe die Gerade CD, errichte auf ihrer Mitte eine Senkrechte EA und beschreibe aus einem beliebigen Punkte O derselben mit OC einen Kreis GFC ..., der den ge-



gebenen in F und G schneide, so ist FG die Potenzlinie dieser beiden Kreise. Es ist aber CD die Potenzlinie des Kreises GF ... mit dem gesuchten, und mithin der Punkt H, in welchem FG und CD sich schneiden, ein Potenzpunkt des gegebenen und gesuchten Kreises. Da nun die Potenzlinie dieser beiden letzteren Kreise ihre gemeinschaftliche Tangente ist, so ziehe man aus H an den gegebenen Kreis die beiden Tangenten HN und HM, so erhält man die Punkte N und M als Berührungspunkte zweier Kreise, welche beide der Aufgabe Genüge thun. Zieht man endlich aus B durch N und M die Geraden BE und MA, so erhält man in den Punkten E und A, wo diese Geraden die AE schneiden, die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, von denen der eine den gegebenen Kreis von außen berührt, der andere ihn umschließt.

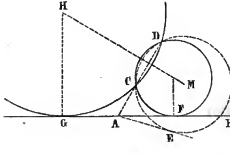
Aufgabe.

35. Es ist ein Kreis gegeben und zwei innerhalb desselben liegende Punkte. Man soll einen Kreis construiren, der den gegebenen berühre und durch die zwei Punkte gehe.

Auflösung wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe.

36. Es ist eine Gerade gegeben und außerhalb derselben zwei Punkte. Man soll einen Kreis beschreiben, der die Gerade berührt und durch die zwei Punkte geht (§. 200).

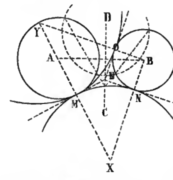


Auflösung. Es sei AB die Gerade und C und D die beiden Punkte. Man verbinde letztere durch die Linie CD, errichte auf ihrer Mitte eine Senkrechte und beschreibe aus irgend einem Punkt M dieser Senkrechten mit MC einen Kreis. Nun ist CD die Potenzlinie des Kreises um M und des gesuchten Kreises. Man verlängere CD bis zum Durchschnitt A mit AB. Nun wird eine aus A an den Kreis

um M gezogene Tangente AE so groß sein als die aus A an den gesuchten Kreis gezogene Tangente. Man mache daher AF = AG = AE, so ist sowohl durch die Punkte C, D. und F, als durch C, D und G ein Kreis bestimmt, welcher der Aufgabe genügt.

Aufgabe.

37. Es sind zwei Kreise gegeben. Man soll einen dritten construiren, der die gegebenen Kreise berühre und zwar den einen in einem gegebenen Punkt.



Auflösung. Es seien die Kreise um A und B gegeben, von denen der erste in M berührt werden soll. Man construire die Potenzlinie CD beider Kreise, Aufg. 32, ziehe durch M eine Tangente an den ersten Kreis, und aus dem Punkt E, in welchem die Potenzlinie geschnitten wird, ziehe man an den Kreis um B die Tangenten EN und EO. Nun ziehe man AM und BN bis zu ihrem Durchschnitt X, so ist dieser der Mittelpunkt des einen Kreises, welcher der Aufgabe Genüge leistet, und zieht man noch die Gerade BO, so liefert ihr Durchschnitt Y mit AM den Mittelpunkt des andern Kreises, welcher der Aufgabe ebenfalls genügt.

Der Beweis ist sehr leicht.

1. Anmerkung. Auch über die Potenzlinien und ihre Anwendung findet man Ausführlicheres in Adams Lehre von den Transversalen; in van Swindens Geometrie u. s. w.

2. Anmerkung. Die Aufgaben 34—37 gehören zu dem sogenannten Tactions-Problem des Apollonius von Pergä (200 v. Chr.). Es ist dieß die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der 3 gegebene Kreise berührt, da aber die Gerade als Kreis von unendlich großem und der Punkt als Kreis von unendlich kleinem Halbmesser betrachtet werden kann, so zerfällt dieses Problem in 10 Aufgaben, welche man durch Kombination von 3 derselben erhält. In §. 130 und §. 162 sind Fälle dieser Aufgabe behandelt.

C. Auflösung einiger geometrischer Aufgaben durch Rechnung.

Aufgabe.

38. Die Grundlinie eines Parallelogramms ist 694′ 9″ 8‴ 6⁗, seine Höhe 90′ 8‴. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Antw. 62604□′ 33□″ 88□‴ 80□⁗ §. 205).

Aufgabe.

39. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist 2390□′ 67□″ 75,81□‴; die Grundlinie 79′ 4″ 5,09‴. Wie groß ist die Höhe?

Antw. $\frac{2390,677581}{79,4509} = 30,09' = 30'\ 9'''$.

Aufgabe.

40. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist 45796□′; wie groß ist eine Seite desselben?

Antw. $\sqrt{45796} = 214'$.

Aufgabe.

41. Aus der gegebenen Diagonale eines Quadrats soll die Seite berechnet werden.

Es sei d = der Diagonale, und x = der Seite des Quadrats, so hat man nach §. 99:

$$d^2 = x^2 + x^2 = 2\,x^2$$
$$\text{also } \tfrac{1}{2}\,d^2 = x^2$$
$$\text{und } \sqrt{\tfrac{1}{2}\,d^2} = x$$
$$\text{oder } d\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,d\sqrt{2} = x.$$

Ist z. B. d = 302′, so findet man die Seite x = 213′ 5″ 4,‴ 6.

Aufgabe.

42. Aus der gegebenen Seite a eines Quadrats die Seite x eines 5 mal so großen Quadrats zu finden.

Man hat $x^2 = 5\,a^2$
also $x = \sqrt{5\,a^2} = a\sqrt{5}.$
Ist z. B. $a = 5'\ 8''\ 9'''$, so findet man $x = 13'\ 1''\ 7,'''\ 1.$

Aufgabe.

43. Die Grundlinie eines Dreiecks ist $6^\circ\ 9'\ 3''$, seine Höhe $4^\circ\ 7'\ 5''$. Wie groß ist sein Flächeninhalt und wie groß die Seite eines Quadrats, welches dem Dreieck an Fläche gleich ist? (§. 205.)

Antw. Der Inhalt des $\triangle = \frac{6{,}93 \times 4{,}75}{2} = 16{,}4507^\circ$
$= 1\square 6^\circ\ 45\square'\ 87\square''\ 50\square'''$

und die Seite des eben so großen Quadrats
$= \sqrt{16{,}4587} = 4{,}0569^\circ$
$= 4^\circ\ 5''\ 6{,}9'''$

Aufgabe.

44. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist a, die eine Kathete b, was ist die andere Kathete?

Antw. Die zweite Kathete ist
$= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

Ist z. B. $a = 42'$, $b = 16'$, so findet man die gesuchte Kathete $= 38'\ 8''\ 3,'''\ 3.$

Aufgabe.

45. Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreiecks die Höhe x desselben zu finden.

Auflösung: Man hat:
$x^2 = a^2 - (\tfrac{1}{2}\,a)^2$
$= a^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2$
$= \tfrac{3}{4}\,a^2$
also $x = \sqrt{\tfrac{3}{4}\,a^2} = \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{3}.$
Ist z. B. $a = 28'$, so ist $x = 24{,}2487'$.

Aufgabe.

46. Aus der Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks seine Seite x zu finden.

Man hat:

$$x^2 - (1/2\, x^2) = h^2$$
$$x^2 - \; 1/4\, x^2 = h^2$$
$$3/4\, x^2 = h^2$$
$$x^2 = \frac{4\, h^2}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{4\, h^2}{3}} = 2\, h\, \sqrt{1/3}$$
$$= 2/3\, h\, \sqrt{3.}$$

Ist z. B. $h = 24 1/4$ Zoll, so ist $x = 28{,}0015''$.
Nimmt man $\sqrt{3} = 1{,}7321$, so ist $x = 28{,}''\,0023$.

Aufgabe.

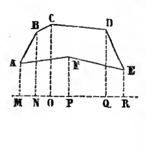
47. In einem Paralleltrapez ist die eine der Parallelseiten $= 24'\ 7''$, die andere $= 19'\ 8''$ und ihr senkrechter Abstand $= 13'\ 9''$. Wie groß ist der Inhalt des Trapezes?

Antw. $\frac{(24{,}7 + 19{,}8) \times 13{,}9}{2} = 309{,}275\square' = 309\square'27\square''50\square'''$.

Aufgabe.

48. Man soll den Inhalt der unregelmäßigen Figur ABCDEF aus folgenden Angaben berechnen:

Auf die willkürlich gezogene Grundlinie MN hat man aus allen Eckpunkten der Figur Senkrechte gezogen, und ist nun



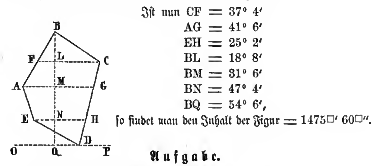
AM = 20° 7′
BN = 26° 5′
CO = 29° 4′
DQ = 24° 8′
ER = 19°
FP = 23° 1′
MN = 5° 3′
NO = 6°
OQ = 18° 3′
QR = 5° 2′
MP = 18° 1.

Man findet den Inhalt der Figur $= 154{,}41\square°$.

Aufgabe.

49. Es soll der Inhalt der Figur A B C D E aus folgenden Angaben gefunden werden:

Man hat BQ beliebig gezogen und auf diese Gerade aus den Ecken C, A, E, D die Senkrechten CF, AG, EH, DO gefällt.



Ist nun CF = 37° 4′
AG = 41° 6′
EH = 25° 2′
BL = 18° 8′
BM = 31° 6′
BN = 47° 4′
BQ = 54° 6′,

so findet man den Inhalt der Figur = 1475□′ 60□″.

Aufgabe.

50. Eine Figur soll so abgezeichnet werden, daß sie ihrer Fläche nach 5mal kleiner werde. In welchem Verhältniß werden die homologen Seiten beider Figuren stehen müssen?

Auflösung. Sind A und a zwei homologe Seiten beider Figuren, so hat man

$$1 : \tfrac{1}{5} = A^2 : a^2 \text{ (§. 221)}$$

also $\sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{5}} = A : a.$

Die Seite A des Originals muß sich also zur homologen Seite a der Copie verhalten wie

$$1 : \sqrt{\tfrac{1}{5}} = 1 : 0{,}44721\ldots = 2{,}23067\ldots : 1.$$

Aufgabe.

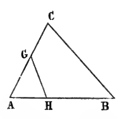
51. Eine Figur wird in einem 15mal verjüngten Maßstab abgezeichnet. Wie vielmal wird die Copie an Fläche kleiner werden als das Original?

Auflösung. Es seien A und a zwei homologe Seiten,

so ist $A : a = 1 : \tfrac{1}{15}$
$= 15 : 1$
also $A^2 : a^2 = 15^2 : 1^2$
$= 225 : 1 = 1 : \tfrac{1}{225}.$

Ebenso verhalten sich aber auch die Flächen beider Figuren, d. h. die Copie wird an Fläche 225mal kleiner werden als das Original.

Aufgabe.



52. Von dem Dreieck ABC soll aus dem Punkt g der Seite AC ein Fünftheil abgeschnitten werden. Wie groß muß AH werden, d. h. in welcher Entfernung von der Spitze A muß die Theilungslinie die Seite A B schneiden?

Auflösung. Man hat

$\triangle ABC : \triangle AGH = AC \times AB : AG \times AH$ (§. 208) und weil
$\triangle ACB : \triangle AGH = 1 : {}^1/_5$, so hat man
$1 : {}^1/_5 = AC \times AB : AG \times AH$, woraus:

$$AH = \frac{AC \times AB}{5\ AG}$$

Ist $AB = 7'\ 5''$, und $AC = 8'\ 6''$ und $AG = 3'$, so findet man $AH = 4'\ 3''$.

Aufgabe.

53. Von einem Dreieck soll durch eine mit der Grundlinie parallel gehende Theilungslinie ein Dritttheil abgeschnitten werden. Eine der beiden Seiten enthält 9 Fuß. In welcher Entfernung x von der Spitze muß diese Seite von der Theilungslinie getroffen werden?

Auflösung. Man hat $1 : {}^1/_3 = 9^2 : x^2$

$$\text{also } x^2 = \frac{9^2}{3}$$

$$\text{und } x = 9\sqrt{{}^1/_3} = 3\sqrt{3}$$

$$= 5{,}195'$$

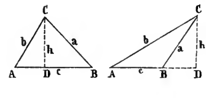
Aufgabe.

54. Ein Dreieck soll durch Theilungslinien, welche mit der Grundlinie parallel gehen, in 5 gleiche Theile getheilt werden. Die Höhe dieses Dreiecks beträgt 375 Fuß. In welchen Abständen von der Spitze an gerechnet, wird die Höhe von den Theilungslinien geschnitten werden?

Antw. In den Abständen: 167,7051'
237,1708'
290,4737'
335,4102'

Aufgabe.

55. Man soll den Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten desselben berechnen.



Auflösung und Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck; man setze

$$AB = c$$
$$AC = b$$
$$BC = a$$
$$CD = h$$
$$AD = x.$$

Nun ist Dreieck $ABC = \frac{c \cdot h}{2}$ (1.

In dem Dreieck ACD ist $h^2 = b^2 - x^2$

$$= (b + x)(b - x). \quad (2.$$

Nach §. 106 hat man

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c \cdot x$ also

$2\,c\,x = b^2 + c^2 - a^2$

$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$ (3. Setzt man diesen Werth in (2, so erhält man

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}\right),$$

wenn man gleichnamig macht:

$$h^2 = \frac{(2\,bc + b^2 + c^2 - a^2)(2\,bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4\,c^2}$$

$$= \frac{[(b^2 + 2\,bc + c^2) - a^2]\,[a^2 - (b^2 - 2\,bc + c^2)]}{4\,c^2}$$

$$= \frac{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]}{4\,c^2}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4\,c^2};$$

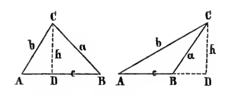
also $h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}}{4\,c^2.}$ (3.

Setzt man den soeben gefundenen Werth für h in Gleichung (1 ein, so ergibt sich

$$\triangle\, ABC = \frac{\sqrt{(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c)}}{4}$$

$$= {}^1/_4 \sqrt{(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c)}.$$

Man kann diesem Ausdruck noch eine bequemere Form geben.



Setzt man $a + b + c = S$, so ist

$$-a + b + c = S - 2a$$
$$a - b + c = S - 2b$$
$$a + b - c = S - 2c, \text{ woraus}$$

$$ABC = \tfrac{1}{4} \sqrt{S \,.\, (S - 2a)(S - 2b)(S - 2c)}$$
$$= \sqrt{\frac{S\,(S - 2a)\,(S - 2b)\,(S - 2c)}{4\,.\,4}}$$
$$= \sqrt{\frac{S}{2}\,.\,\frac{(S - 2a)}{2}\,.\,\frac{(S - 2b)}{2}\,.\,\frac{(S - 2c)}{2}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} S\,(\tfrac{1}{2} S - a)\,(\tfrac{1}{2} S - b)\,(\tfrac{1}{2} S - c)}$$

Man findet also den Inhalt des Dreiecks, wenn man die halbe Summe der Seiten nimmt, von diesen nach einander die drei Seiten abzieht, die drei erhaltenen Reste mit einander und mit der halben Summe der Seiten multiplicirt und aus dem Produkt die Quadratwurzel zieht.

Beispiel. Es sei $a = 84{,}5'$

$$b = 130'$$
$$c = 71{,}5'$$
$$\text{also } S = 286'$$
$$\tfrac{1}{2} S = 143$$
$$\tfrac{1}{2} S - a = 58{,}5$$
$$\tfrac{1}{2} S - b = 13$$
$$\tfrac{1}{2} S - c = 71{,}5$$
$$\tfrac{1}{2} S\,(S - a)\,(\tfrac{1}{2} S - b)\,(\tfrac{1}{2} S - c) = 7775732{,}25$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2} S\,(\tfrac{1}{2} S - a)\,(\tfrac{1}{2} S - b)\,(\tfrac{1}{2} S - c)} = 2788{,}5\square'$$
$$= 2788\square'\ 50\square''$$
$$= \text{dem Inhalt des Dreiecks.}$$

Aufgabe.

56. Welche Gestalt nimmt die in voriger Aufgabe berechnete Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks an, wenn die drei Seiten gleich sind?

Antw. $\frac{a^2}{4} \sqrt{3.} = \frac{a^2}{4} \,.\, 1{,}7321 = 0{,}4343 \,.\, a^2.$

D. Kreisrechnungen.

Aufgabe.

57. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Länge der Peripherie und den Flächeninhalt zu finden.

Auflösung. Ist r der Halbmesser, so ist die

Peripherie $= 2\ r\ \pi$ (§. 239),

und der Flächeninhalt $= 2\ r\ \pi \times \frac{r}{2} = r^2\ \pi$ (§. 237).

Ist z. B. $r = 3'\ 4''$, so findet man für $\pi = 3{,}14159$

Umfang $p = 21',362812 = 21'\ 3''\ 6''',3$,

$p = 21',3656 = 21'\ 3''\ 6''',5$, für $\pi = 3{,}142$.

Inhalt $c = 36\square',3167804 = 36\square'\ 31\square''\ 67\square''',8$.

$c = 36\square',32152 = 36\square'\ 32\square''\ 15\square''',2$.

Aufgabe.

58. Aus der gegebenen Länge der Peripherie den Halbmesser des Kreises zu finden.

Auflösung. Ist p die Länge der Peripherie, so hat man:

$$2\ r\ \pi = p$$

$$\text{also}\ r = \frac{p}{2\ \pi}$$

Ist z. B. $p = 18{,}7$, so findet man für $\pi = 3{,}14159$

$r = 2',9762 = 2'\ 9''\ 7''',6$;

$r = 2',9758 = 2'\ 9''\ 7''',6$, für π 3,142

Aufgabe.

59. Aus dem gegebenen Inhalt eines Kreises den Halbmesser zu finden.

Auflösung. Ist c der Inhalt des Kreises, so hat man:

$$r^2\ \pi = c$$

$$\text{also}\ r^2 = \frac{c}{\pi}$$

$$\text{und}\ r = \sqrt{\frac{c}{\pi}}$$

Ist z. B. die Fläche des Kreises 3739□′ 28□″ 94‴, so findet man für den Halbmesser:

= 34,498′ = 34, 4″ 9,8‴ (π = 3,142) oder
34,5005′ = 34′ 5″ (π = 3,14159).

Aufgabe.

60. Der Inhalt eines Kreises ist 325 □′, wie lang ist die Peripherie?

Antw. 63,91088′ = 63′ 9″ 1,1‴ (π = 3,142) oder
63,9068′ = 63′ 9″ 0,7‴ (π = 3,14159)

Aufgabe.

61. Man soll die Länge eines in Graden gegebenen Bogens berechnen, wenn der Halbmesser gegeben ist.

Auflösung. Der Halbmesser sei = r, der Bogen enthalte m Grade.
Man hat $360^\circ : m^\circ = 2\,r\,\pi : x$

$$x = \frac{m\,.\,2\,r\,\pi}{360} = \frac{m\,r\,\pi}{180}$$

= der Länge des Bogens.

Ist z. B. der Bogen = 54° 28′ 40″ und der Halbmesser = 42′, so ist die Länge des Bogens = 39,93948 = 39′ 9″ 3,9‴ (π = 3,142) oder
= 39,9369 = 39′ 9″ 3,7‴ (π = 3,14159).

Aufgabe.

62. Wie groß ist die Länge eines Bogens von 87° 12′ 24″ bei einem Durchmesser von 174′?

Antw. 132,4352′ = 132′ 4″ 3,5‴ (π = 3,142) oder
132,417718′ = 132′ 4″ 1,8‴ (π = 3,14159).

Aufgabe.

63. Man soll den Inhalt eines Kreissectors berechnen, wenn der dazu gehörige Bogen in Graden und der Halbmesser des Kreises gegeben sind.

Auflösung. Es sei r der Halbmesser und m die Zahl der Grade des Bogens, so ist

$$\frac{m\,.\,2\,r\,\pi}{360} = \text{der Länge des Bogens (Aufgabe 61),}$$

also $\frac{m \cdot 2 r \pi}{360} \times \frac{r}{2} = \frac{2 \cdot m r^2 \pi}{2 \cdot 360} = \frac{m r^2 \pi}{360}$ (§. 237. 2)
= dem Inhalt des Sectors.

Es sei z. B. $m = 87^\circ\ 12'\ 24''$, so ist der Inhalt des Sectors
$= 5760{,}9203637\square' = 5760\square'\ 92\square''\ 3{,}6\square'''$ ($\pi = 3{,}142$)
oder $= 5760{,}5019537\square' = 5760\square'\ 50\square''\ 19{,}5\square'''$ ($\pi = 3{,}14159$).

Aufgabe.

64. Aus der Länge eines Kreisbogens und dem dazu gehörigen Halbmesser die Anzahl der Grade zu berechnen, welche der Bogen hält.

Auflösung. Es sei l die Bogenlänge und r der Halbmesser Man hat:

$$2 r \pi : l = 360^\circ : x^\circ$$
$$x = \frac{l : 360}{2 r \pi} = \frac{l : 180}{r \pi}$$

Ist z. B. die Bogenlänge $= 134'\ 1''$ und der Halmesser $= 71'\ 9'''$ so findet man für die Zahl der Grade des Bogens:

$106^\circ\ 50'\ 52{,}6''$ ($\pi = 3{,}142$) oder
$106^\circ\ 51'\ 42{,}9''$ ($\pi = 3{,}14159$).

Aufgabe.

65. Aus der gegebenen Fläche eines Kreissectors und dem Halbmesser die Anzahl der Grade zu berechnen, welche der zu diesem Sector gehörige Bogen enthält.

Auflösung. Es sei S die Fläche des Sectors, r der Halbmesser und m die gesuchte Gradzahl des Bogens. Man hat nach Aufgabe 63

$$S = \frac{m r^2 \pi}{360}$$
also $$\frac{360 \cdot S}{r^2 \pi} = m.$$

Ist $r = 12{,}1'$ und $S = 128\square'$, so ist $m = 100^\circ\ 10'\ 57''$ ($\pi = 3{,}14159$)
$= 100^\circ\ 10'\ 10{,}2''$ ($\pi = 3{,}142$).

Aufgabe.

66. Man soll aus der gegebenen Fläche S eines Sectors und der Zahl m der Grade, welche der dazu gehörige Bogen enthält, den Halbmesser r des Kreises berechnen.

Man hat aus Aufgabe 63

$$S = \frac{m\, r^2\, \pi}{360},$$

also $\frac{360\, S}{m\,.\,\pi} = r^2$.

und $\sqrt{\frac{360\, S}{m\, \pi}} = r$.

Ist z. B. $S = 892\square'$ und $m = 39^\circ\ 12'$, so findet man für
$r = 51{,}064' = 51'\ 6{,}2''' \ (\pi = 3{,}14159)$
oder $r = 51{,}06078' = 51'\ 6''\ 0{,}8''' \ (\pi = 3{,}142)$.

Aufgabe.

67. Man soll den Inhalt des Kreisabschnitts berechnen, der auf der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ruht.

Auflösung. Ist r der Halbmesser des Kreises, so ist die Seite des eingeschriebenen Sechsecks ebenfalls $= r$ (§. 242). Der Inhalt des Kreises $= r^2\, \pi$;
mithin der Inhalt des zu einer Seite des Sechsecks gehörigen

Sectors $= \frac{r^2\, \pi}{6}$;

ferner der Inhalt des hievon abzuziehenden gleichseitigen Dreiecks

$= \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$ (Aufgabe 56),

also der Inhalt des Kreisabschnitts

$$= \frac{r^2\, \pi}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{(2\, \pi - 3 \sqrt{3})\, r^2}{2}$$
$$= 0{,}090586\ .\ r^2\ (\pi = 3{,}14159)$$
$$= 0{,}09065\ .\ r^2\ (\pi = 3{,}142).$$

Aufgabe.

68. Man soll den Inhalt des Kreisabschnitts über der Seite des eingeschriebenen Quadrats berechnen.

Auflösung. Ist r der Halbmesser und a die Seite des eingeschriebenen Quadrats, so ist der Inhalt des zu a gehörigen Sectors

$$= \frac{r^2\, \pi}{4},$$

und der Inhalt des hievon abzuziehenden Dreiecks

$$= \frac{1}{2} r^2;$$

also der Inhalt des gesuchten Abschnitts

$$\frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{(\pi - 2) r^2}{4}$$
$$= 0{,}2855\ r^2\ (\pi = 3{,}142)$$
$$= 0{,}2853975\ r^2\ (\pi = 3{,}14159)$$

Aufgabe.

69. Es soll der Flächeninhalt eines Kreisringes (des zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise enthaltenen Flächenraums) gefunden werden.

Auflösung. Ist R der Halbmesser des größeren und r der Halbmesser des kleineren Kreises, so ist der Inhalt des Kreisringes

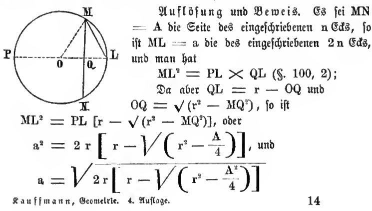
$$= R^2 \pi - r^2 \pi$$
$$= (R^2 - r^2) \pi$$
$$= (R + r)(R - r) \pi.$$

Ist z. B. R = 8′ und r = 6′, so ist der Inhalt des Ringes

$$= 87\square'\ 96\square''\ 45\square'''\ (\pi = 3{,}14159)$$
$$= 87\square'\ 97\square''\ 60\square'''\ (\pi = 3{,}142).$$

Aufgabe.

70. Die Seite A eines in den Kreis eingeschriebenen regulären n Ecks und der Halbmesser r des Kreises sind gegeben; man soll die Seite a des in denselben Kreis eingeschriebenen 2 n Ecks finden.



Auflösung und Beweis. Es sei MN = A die Seite des eingeschriebenen n Ecks, so ist ML = a die des eingeschriebenen 2 n Ecks, und man hat

$$ML^2 = PL \times QL\ (\S.\ 100,\ 2);$$

Da aber QL = r − OQ und

$$OQ = \sqrt{(r^2 - MQ^2)},$$ so ist

$$ML^2 = PL\,[r - \sqrt{(r^2 - MQ^2)}],$$ oder

$$a^2 = 2r\left[r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{A}{4}\right)}\right],$$ und

$$a = \sqrt{2r\left[r - \sqrt{\left(r^2 - \frac{A^2}{4}\right)}\right]}$$

$$a = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{\frac{4r^2 - A^2}{4}}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{\left(4r^2 - A^2\right)}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{\left(4 - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{\left(4 - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{\left(2 + \frac{A}{r}\right)\left(2 - \frac{A}{r}\right)}}$$

Aufgabe.

71. Die Seite a eines in den Kreis beschriebenen 2 n Ecks und der Halbmesser r des Kreises sind gegeben. Man soll die Seite A des in denselben Kreis eingeschriebenen n Ecks finden.

Auflösung und Beweis. Es sei wieder a die Seite des eingeschriebenen 2 n Ecks, so hat man, nach Aufgabe 70,

$$a^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{A^2}{4}\right)}$$

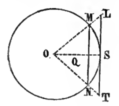
$$= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - A^2},$$

also $4r^2 - A^2 = \frac{(a^2 - 2r^2)^2}{r^2}$,

woraus $A = \frac{a\sqrt{4r^2 - a^2}}{r} = \frac{a\sqrt{(2r - a)(2r + a)}}{r}$

Aufgabe.

72. Die Seite A eines in den Kreis eingeschriebenen n Ecks und der Halbmesser des Kreises sind gegeben. Man soll die Seite A des um den nämlichen Kreis beschriebenen n Ecks finden.



Auflösung und Beweis. Ist MN = A die Seite des eingeschriebenen und LT = A' die des umschriebenenen n Ecks, so hat man

MN : LT = OQ : OS (§. 171, 3).

Da nun $OQ = \sqrt{r^2 - \frac{A^2}{4}}$,

so ist auch $MN : LT = \sqrt{r^2 - \frac{A^2}{4}} : OS$ oder

$$A : A' = \sqrt{r^2 - \frac{A^2}{4}} : r, \text{ also}$$

$$A' = \frac{A \times r}{\sqrt{r^2 - \frac{A^2}{4}}}$$

$$= \frac{A \times r}{\frac{1}{2}\sqrt{4 r^2 - A^2}}$$

$$= \frac{A\ r}{\frac{1}{2}\sqrt{4 r^2 - A^2}}$$

$$= \frac{A\ r}{\frac{1}{2} r \sqrt{4 - \frac{A^2}{r^2}}}$$

$$= \frac{2\ A}{\sqrt{4 - \frac{A^2}{r^2}}}$$

$$= \frac{2\ A \left(\sqrt{4 - \frac{A^2}{r}}\right)}{\left(\sqrt{4 - \frac{A^2}{r^2}}\right)\left(\sqrt{4 - \frac{A^2}{r^2}}\right)}$$

$$= \frac{2\ A \sqrt{\left(2 + \frac{A}{r}\right)\left(2 - \frac{A}{r}\right)}}{\left(2 + \frac{A}{r}\right)\left(2 - \frac{A}{r}\right)}$$

Setzt man $r = 1$, so verwandelt sich der Ausdruck

$$= \frac{2\ A \sqrt{(2 + A)\ (2 - A)}}{(2 + A)\ (2 - A)}$$

Aufgabe.

73. Die Seite und den Flächeninhalt des eingeschriebenen regulären Dreiecks, Vierecks, Fünfecks u. s. w., zu berechnen, wenn der Halbmesser gegeben ist.

Auflösung. 1) Das Dreieck. Es sei r der Halbmesser, A die Seite des Dreiecks und a die Sechsecksseite (der Halbmesser, so folgt aus Aufgabe 71

$$A = \frac{a\sqrt{(2r - a)(2r + a)}}{r} = r\sqrt{3},$$

Ist h die Höhe des regulären Dreiecks, so hat man

$$h^2 = A^2 - \frac{1}{4} A^2 = \frac{3}{4} A^2,$$

$$\text{also } h = \frac{1}{2} A \sqrt{3};$$

und folglich der Inhalt des Dreiecks

$$= A \times \frac{1}{4} A \sqrt{3} = A^2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = A^2 \times 0{,}4330127.$$

2) Das Viereck. Ist A die Seite des regulären Vierecks, so ist dessen Diagonale

$$= A\sqrt{2},$$

und deren Hälfte $= \frac{1}{2} A \sqrt{2} = r,$

woraus $A = r\sqrt{2}.$

Der Inhalt des regulären Vierecks ist bekanntlich A^2.

3) Das Fünfeck. Ist A die Fünfecks- und a die Zehnecksseite, so ist

$$r : a = a : r - a \quad (\text{§. } 244),$$

$$\text{also} \quad r^2 - ar = a^2,$$

$$\text{woraus } a = \frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5}).$$

Nun ist nach §. 246,

$$A^2 = r^2 + a^2$$

$$= r^2 + \frac{1}{4} r^2 (-1 + \sqrt{5})^2$$

$$= \frac{r^2}{4} (10 - 2\sqrt{5})$$

$$\text{also } A = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

woraus umgekehrt $r = A \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}}.$

Denkt man sich das Fünfeck aus seinem Mittelpunkt in 5 Dreiecke zerlegt, so ist die Höhe eines jeden dieser Dreiecke (oder der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises)

$$r' = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} A^2}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck statt r seinen oben gefundenen Werth, so erhält man

$$r' = \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Mithin findet man den Inhalt eines Dreiecks

$$\frac{1}{2} A^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

und also für den Inhalt des Fünfecks

$$5 \cdot \tfrac{1}{4} A^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = A^2 \cdot \tfrac{1}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$
$$= A^2 \times 1{,}7204774.$$

Ist D die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks, so hat man

$$D^2 = (r + r')^2 + \tfrac{1}{4} A^2,$$

und setzt man statt r und r' ihre Werthe:

$$D = \tfrac{1}{2} A (1 + \sqrt{5}).$$

4) Das Sechseck. In einem regulären Sechseck ist die Sechsecksseite $a = r$. Denkt man sich dasselbe aus dem Mittelpunkt in 6 Dreiecke zerlegt, so ist der Inhalt eines jeden derselben

$\tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, und mithin der Inhalt des Sechsecks:

$$\tfrac{6}{4} a^2 \sqrt{3} = a^2 \cdot \tfrac{3}{2} \sqrt{3} = a^2 \times 2{,}5980762.$$

5) Das Achteck. Ist A die Seite des eingeschriebenen Vierecks und a die des Achtecks, so ist, nach Nr. 2, $A = r\sqrt{2}$, und, nach Aufgabe 70,

$$a = r \sqrt{2 - \sqrt{\left(2 - \frac{A}{r}\right)\left(2 + \frac{A}{r}\right)}},$$

woraus, wenn man $r\sqrt{2}$ statt A setzt, sich ergibt

$$a = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \text{ und hieraus } r = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Denkt man sich wieder das Achteck aus dem Mittelpunkt in 8 Dreiecke zerlegt, so ist die Höhe eines solchen Dreiecks, d. h. der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises

$$r' = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Substituirt man hier wieder für r den oben gefundenen Ausdruck, so

erhält man $r' = \frac{a}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}};$

so daß also der Inhalt eines Dreiecks

$$= \frac{a^2}{4} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}},$$

und der Inhalt des ganzen Achtecks

$$= a^2 . 2 \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = a^2 \cdot 4{,}8284271.$$

6. Das Zehneck. Ist a die Seite des eingeschriebenen Zehnecks, so ist, nach Nr. 3, $a = \tfrac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})$, woraus

$$r = \frac{2a}{-1 + \sqrt{5}.}$$

Für r' findet man den Ausdruck

$$\frac{a}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5};}$$

für ein Dreieck um den Mittelpunkt

$$\frac{a^2}{4} \sqrt{5 + 2\sqrt{5},}$$

und für das ganze Zehneck

$$a^2 \cdot \frac{5}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = a^2 \cdot 7{,}6942088$$

u. s. w.

Aufgabe.

74. Man soll aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises die Länge der Peripherie näherungsweise finden.

Auflösung. Man berechne nach Aufgabe 70 aus der Seite des eingeschriebenen Sechsecks nach einander die eines eingeschriebenen 12 —, 24 — 48 —, 96 Ecks ꝛc., und nach Aufgabe 72 die eines um denselben Kreis beschriebenen Sechsecks, 12 —, 24 —, 48 —, 96 Ecks ꝛc., so wird die Länge der Peripherie zwischen den Umfängen je zweier gleichnamiger Vielecke liegen und um so genauer erhalten werden, je enger man die Grenzen nimmt, zwischen denen sie liegt, d. h. je größer man die Seitenzahl des ein- und umschriebenen Vielecks nimmt.

Setzt man den Halbmesser $r = 1$, so ist auch die Seite des eingeschriebenen Sechsecks $= 1$, und folglich nach Aufgabe 72 die Seite des umschriebenen Sechsecks

$$= \tfrac{2}{3} \sqrt{3}$$

Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist also $= 6$ und der des umschriebenen $= 6 \times \tfrac{2}{3} \sqrt{3}$

$$= 4\sqrt{3}$$
$$= 6{,}9282036.$$

Nun berechtige man nach Aufgabe 70 aus der Seite 1 des eingeschriebenen Sechsecks die des eingeschriebenen Zwölfecks, indem man in der Formel für a daselbst $r = A = 1$ setzt. Dadurch erhält man die Zwölfecksseite

$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$
$$= 0{,}\ 517638.$$

Um nun auch die Seite des umschriebenen Zwölfecks zu finden, setze man in der Formel für A' (Aufgabe 72) r = 1 und A = 0,517638, so erhält man die Seite des umschriebenen Zwölfecks = 0,5358984.

Es ist aber der Umfang des eingeschriebenen Zwölfecks = 6,2116571 und der des umschriebenen = 6,4307806, zwischen welchen Grenzen die Länge der Peripherie liegt.

Auf diese Weise fortfahrend, findet man:

Im	Die Seite des eingeschriebenen	Die Seite des umschriebenen	Den Umfang des ersteren	Den Umfang des zweiten
6 Eck	1,0000000 . .	1,1547006 . .	6,0000000 . .	6,9282036
12 —	0,5176380 . .	0,5358984 . .	6,2116571 . .	6,4307806
24 —	0,2610524 . .	0,2633050 . .	6,2652572 . .	6,3193199
48 —	0,1308062 . .	0,1310870 . .	6,2787004 . .	6,2921724
96 —	0,0654380 . .	0,0654732 . .	6,2820639 . .	6,2854292
192 —	0,0327234 . .	0,0327278 . .	6,2829049 . .	6,2837461
384 —	0,0163624 . .	0,0163628 . .	6,2831152 . .	6,2833260
768 —	0,0081812 . .	0,0081814 . .	6,2831678 . .	6,2832203
1536 —	0,0040906 . .	0,0040906 . .	6,2831809 . .	6,2831941
3072 —	0,0020453 . .	0,0020453 . .	6,2831842 . .	6,2831875

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, wie die Seiten der ein- und umschriebenen Vielecke sich an Größe immer mehr nähern. Bei den Seiten des 1536 Ecks liegt der Unterschied nur in den weggelassenen Decimalstellen. Ebenso nähern sich natürlich auch die Umfänge der ein- und umschriebenen Vielecke.

Der Umfang des umschriebenen 3072 Ecks ist von dem des eingeschriebenen 3072 Ecks nur in den letzten Decimalstellen verschieden. Die fünf ersten Decimalstellen, welche beiden gemeinschaftlich sind, gehören nothwendig auch zum Umfange des Kreises, dessen Länge also 6,28318 . . ist, wenn der Halbmesser = 1 gesetzt wird. Der Durchmesser verhält sich also zum Umkreis, wie 2 : 6,28318 . . . Dividirt man die beiden Glieder des Verhältnisses durch 2, so ergibt sich

$$1 : 3{,}14159 \quad .$$

als das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreis, wenn der Durchmesser = 1 gesetzt wird.

Archimedes hat auf eine ähnliche Art aus dem Umfang des ein- und umschriebenen 96 Ecks gefunden, deß der Kreisumfang größer als $3\,^{10}/_{71}$ und kleiner als $3\,^{10}/_{70}$ sei, wenn der Durchmesser als 1 angenommen wird. Nimmt man nährungsweise die Zahl $3\,^{10}/_{70}$ oder $3\,^{1}/_{7}$ als Kreisumfang an, so ergibt sich das Verhältniß $1 : 3\,^{1}/_{7}$, oder $7 : 22$.



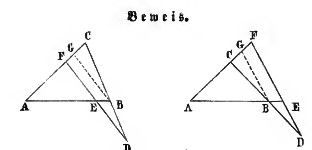
II. Anhang.

A. Noch einige Sätze von den Transversalen des Dreiecks.

Lehrsatz 1.

Wenn man die drei Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen durch eine Transversale beliebig schneidet, so werden auf jeder Seite zwei Abschnitte bestimmt, und zwar so, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt aus den drei andern.

Beweis.



Die drei Seiten des Dreiecks ABC werden von der Transversalen FD geschnitten, und es werden dadurch auf AB die beiden Abschnitte AE und BE, auf AC die Abschnitte AF und CF, und auf CB die Abschnitte CD und DB bestimmt. Zieht man nun BG parallel mit FD, so ist

$$CD : DB = CF : FG \text{ (§. 170, b)}$$
$$AF : CF = AF : CF$$
$$BE : AE = FG : AF \text{ (§. 170, c).}$$

Multiplicirt man nun diese Proportionen mit einander (§. 167, X), so erhält man eine Proportion, in welcher die Glieder des zweiten Verhältnisses gleich sind; mithin sind es auch die Glieder des ersten Verhältnisses, d. h. es ist $CD \times AF \times BE = DB \times CF \times AE$.

Anmerkung. Dieser Satz heißt der des Menelaus (98 n. Chr.).

Lehrsatz 2.

Umgekehrt, werden auf den Seiten AC und AB und der dritten Seite CB oder auch auf den Verlängerungen aller drei Seiten die Punkte F, E und D so bestimmt, daß

$$CD \times AF \times BE = DB \times CF \times AE,$$

so liegen diese drei Punkte in gerader Linie.

Beweis.

Angenommen, die Verlängerung von FE treffe die Seite CD nicht in D sondern in D′, so wäre

$CD' \times AF \times BE = D'B \times CF \times AE$ (Lehrs. 1);
es ist aber auch $CD \times AF \times BE = DB \times CF \times AE$ (V.),
mithin, wenn man Gleiches durch Gleiches dividirt,

$$\frac{CD'}{CD} = \frac{D'B}{DB}$$

oder $CD' : CD = D'B : DB$,
oder $CD' : D'B = CD : DB$;
also auch $CD' : CD' - D'B = CD : CD - DB$,
d. h. $CD' : CB = CD : CB$,
folglich $CD = CD'$

d. h. der Punkt D′ fällt stets mit D zusammen, oder die Punkte F, E und D liegen in gerader Linie.

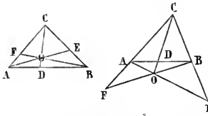
Lehrsatz 3.

Wenn man aus einem innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks liegenden Punkte O Transversalen nach den Ecken des Dreiecks zieht und dieselben verlängert, bis sie die Gegenseiten treffen, so wird dadurch jede Seite des Dreiecks in zwei Abschnitte getheilt, und zwar so, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkt der drei andern.

Beweis.

Die Seiten des Dreiecks ABC werden von den aus O nach den Eckpunkten gezogenen Transversalen in F, E und D geschnitten und, beziehlich, in die Abschnitte AF und CF, BE und CE, AD und BD getheilt. Da

nun das Dreieck ADC von der Transversale BF und das Dreieck BDC von der Transversale AE geschnitten wird, so ist (nach Lehrs. 1)



$$CF \times AB \times OD = DB \times OC \times AF$$

und $AD \times OC \times BE = CE \times AB \times OD.$

Multiplicirt man nun diese gleichen Produkte mit einander und dividirt auf beiden Seiten durch $AB \times OD \times OC$, so erhält man

$$CF \times AD \times BE = CE \times DB \times AF.$$

Lehrsatz 4.

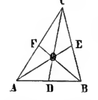
Werden, umgekehrt, auf den drei Seiten eines Dreiecks, oder auf einer Seite und den Verlängerungen der beiden andern drei Punkte D, F und E so bestimmt, daß

$$CF \times AD \times BE = CE \times DB \times AF,$$

so schneiden sich die aus diesen drei Punkten nach den Ecken des Dreiecks gezogenen Transversalen in einem und demselben Punkt.

Der Beweis wird indirekt und fast auf dieselbe Art geführt wie der Beweis zu Lehrsatz 2.

Zusätze.



Zieht man in einem Dreieck ABC die Seiten-halbirenden Transversalen AE, BF, CD, so schneiden sich diese in Einem Punkte.

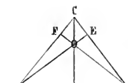
Denn weil $AD = DB$

$BE = EC$

$CF = AF.$

so ist $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times AF$;

mithin schneiden sich die Transversalen in Einem Punkte (Lehrs. 4). Dieser Satz ist im Anhang zum 7. Abschnitt bereits auf eine andere Art erwiesen worden.



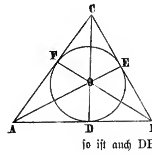
2) Die Höhenperpendikel eines Dreiecks schneiden sich in einem und demselben Punkte. — Denn weil die Dreiecke AEB und CDB, AEC und BFC, ADC und AFB ähnlich sind, so ist

$$DB : BC = BE : AB$$
$$CE : AC = FC : BC,$$
$$AF : AB = AD : AC.$$

Multiplicirt man nun diese drei Proportionen mit einander, so erhält man eine neue, in welcher das zweite und vierte Glied gleich sind, mithin auch das erste und dritte Glied,

d. h. $DB \times CE \times AF = BE \times FC \times AD.$

Die Höhenperpendikel schneiden sich also in einem Punkte. — Auch dieser Lehrsatz ist bereits im Anhang zum zweiten Abschnitt auf andere Art bewiesen worden.



3) In einem Dreieck, das um einen Kreis beschrieben ist, schneiden sich die aus den Ecken nach den Berührungspunkten gezogenen Transversalen in einem und demselben Punkte.

Den weil $\left.\begin{array}{l} DB = BE \\ CE = FC \\ AF = AD \end{array}\right\}$ (§. 159, Zus. 1).

so ist auch $DB \times CE \times AF = BE \times FC \times AD$; mithin *c.

B. Die harmonische Theilung.

Erklärung.

Wenn auf einer begrenzten Geraden BA der Punkt D, und in ihrer Verlängerung der Punkt D′ so genommen wird, daß sich BD : AD = BD′ : AD′ verhält, d. h. daß die Entfernungen der Punkte D und D′ von

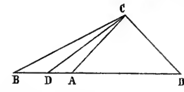
B D A D′

den Endpunkten der Geraden BA proportionirt sind, so sagt man, die letztere sei durch D in Beziehung auf D′ **harmonisch** getheilt. Die Punkte B, D, A und D′ heißen harmonische Punkte. (S. Anhang zum fünften Abschnitt.)

Zusatz.

Aus der Proportion BD : AD = BD′ : AD ergibt sich unmittelbar: BD : BD′ = AD : AD′, woraus folgt, daß auch die Linie DD′ durch A in Beziehung auf B harmonisch getheilt ist. Von den vier harmonisch liegenden Punken B, D, A und D′ heißen deßhalb A und B einander zugeordnet; ebenso D und D′.

Erklärung.



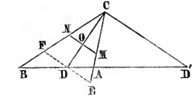
Zieht man aus den vier harmonischen Punkten B, D, A und D′ gerade Linien nach einem beliebigen Punkt C, so erhält man vier **harmonische Strahlen**, von welchen diejengen, die aus je zwei einander zugeordneten harmonischen Punkten B und A, D und D′ gezogen sind, einander **zugeordnete harmonische** Strahlen heißen.

Lehrsatz 1.

Zieht man durch irgend einen Punkt eines harmonischen Strahles eine Parallele mit dem ihm zugeordneten Strahl, so wird

das zwischen den beiden andern zugeordneten Strahlen liegende Stück dieser Parallele in jenem Punkte halbirt.

Beweis.



Es seien B, D, A und D' harmonisch liegende Punkte, und also CB, CD, CA und CD' harmonische Strahlen. Man ziehe nun durch D eine Parallele mit dem Strahl CD', welcher dem Strahl CD zugeordnet ist, so ist, wegen der ähnlichen Dreiecke BFD und BCD':

1) BD : BD' = FD : CD'; und ebenso, wegen der ähnlichen Dreiecke DAE und CAD'.

2) AD : AD' = DE : CD'. Da nun auch BD : BD' = AD : AD' (B.), so sind also in den Proportionen (1) und (2) die beiden ersten Verhältnisse gleich, also auch

FD : CD' = DE : CD', und mithin FD = DE.

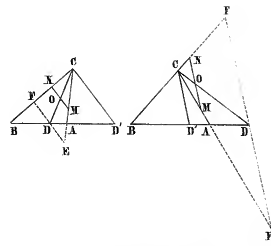
Zieht man nun durch irgend einen andern Punkt O von CD eine Paralle NM mit CD' und verlängert sie bis CB und CA, so wird auch diese Parallele durch CD halbirt (§. 171, 3).

Lehrsatz 2.

Die begrenzte Gerade BA wird in Beziehung auf den Punkt D' (der entweder auf ihr oder in ihrer Verlängerung genommen ist) harmonisch getheilt, wenn man aus den Punkten B, A, D' nach einem beliebigen Punkte C die Strahlen BC, AC und D'C, hierauf aus irgend einem Punkt M des Strahles AC eine Parallele MN mit D'C zieht, diese in O halbirt und endlich C und O durch eine Gerade verbindet, deren Durchschnitt D mit BA die verlangte harmonische Theilung vollbringt.

Beweis.

Ziehe durch D eine Parallele mit CD' zwischen BC und AC, so wird diese in D halbirt. (§. 171, 3.)



Nun ist wegen der ähnlichen Dreiecke BDF und BD'C

$$BD' : BD = CD' : FD \quad (1.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACD' und ADE

$$AD' : AD = CD' : DE,$$

oder da DE = FD ist

$$AD' : AD = CD' : FD \quad (2.$$

Aus (1 und (2 folgt nach §. 167, II, 1:

$$BD' : BD = AD' : AD \text{ oder}$$

$$BD' : AD = BD : AD,$$

d. h. BA ist in Beziehung auf D' in D harmonisch getheilt.

Zusätze.

a) Hieraus ergibt sich leicht die Auflösung der Aufgabe:

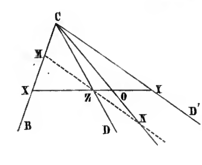
Eine gegebene Gerade BA in Beziehung auf den Punkt D' harmonisch zu theilen, wenn B und A als zugeordnete harmonische Punkte genommen werden.

b) Zu dreien, in einem Punkt C zusammenlaufenden Strahlen BC, DC und AC, von denen BC und AC einander zugeordnet sind, findet man den vierten harmonischen Strahl, wenn man eine beliebige Durchschnittslinie BA zieht, zu D den ihm zugeordneten harmonischen Punkt D' sucht, und hierauf CD' zieht.

Lehrsatz 3.

Jede Gerade XY, welche vier harmonische Strahlen schneidet, wird von diesen harmonisch getheilt.

Beweis.



Man ziehe durch Z eine Parallele MN mit CD', so ist $ZM = ZN$ (Lehrs. 1). Nun ist wegen der ähnlichen Dreiecke XZM und XYC, ZON und COY

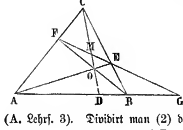
$$XZ : XY = ZM : YC;$$
$$ZO : OY = ZN : YC;$$

also $XZ : XY = ZO : OY$,
oder $XZ : ZO = XY : OY$;
also XY harmonisch getheilt.

Lehrsatz 4.

Wenn man in einem Dreieck drei Transversalen zieht, die einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, hierauf die Fußpunkte zweier derselben durch eine Gerade verbindet und diese so weit verlängert, bis sie diejenige Dreiecksseite, auf welcher die Fußpunkte nicht liegen, schneidet, so wird letztere durch jene Verbindungslinie und die dritte Transversale harmonisch geschnitten.

Beweis.



In dem Dreieck ABC sind die Fußpunkte F und E der Transversalen BF und AE durch die Gerade FG verbunden, welche die Dreiecksseite AB in G schneidet. Nun ist 1) $AG \,.\, BE \,.\, CF = BG \,.\, CE \,.\, AF$ (A. Lehrs. 1) u. 2) $AD \,.\, BE \,.\, CF = BD \,.\, CE \,.\, AF$ (A. Lehrs. 3). Dividirt man (2) durch (1), so erhält man

$$\frac{AD}{AG} = \frac{BD}{BG}$$

oder $AD : AG = BD : BG$, oder $AD : BD = AG : BG$.

Die Punkte A, B, D und G liegen also harmonisch.

Zusatz.

1) Die Gerade FE wird in M und G ebenfalls harmonisch getheilt. Denn die Strahlen CA, CD, CB, CG sind harmonisch und schneiden deßhalb die Gerade FE in den Punkten F, M, E, G ebenfalls harmonisch (Lehrs. 3).

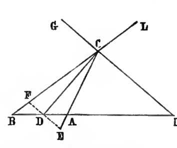
2) Auch auf der Transversale CD liegen die Punkte O und C gegen M und D harmonisch. Denn diese Punkte sind die Durchschnitte der CD mit den vier harmonischen Strahlen AF, AM, AE und AG.

3) Aus Lehrsatz 4 ergibt sich sehr leicht die Auflösung der Aufgabe: Zu 3 Punkten den vierten harmonischen bloß mittelst des Lineals zu finden.

Lehrsatz 5.

Sind von vier harmonischen Strahlen zwei einander zugeordnete CD und CD′ senkrecht auf einander, so halbirt jeder derselben den Winkel der beiden andern.

Beweis.



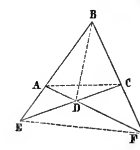
Zieht man durch D eine Parallele mit CD′, so ist auch CD senkrecht auf dieser Parallele, und es sind daher die Dreiecke CFD und CED congruent (weil FD = DE nach Lehrsatz 1, B); folglich W. FCD = W. ECD, also W. BCA durch CD halbirt. Da aber auch W. BCG = W. ACD′, und W. BCG = W. LCD′, so ist auch W. ACD′ = W. LCD′, d. h. W. LCA wird durch CD′ halbirt.

Zusätze.

1) Umgekehrt: Sind unter vier Strahlen zwei, CD und CD′, senkrecht auf einander und halbirt jeder dieser letzteren den Winkel der beiden andern, so sind diese Strahlen harmonisch. (Ist im Anhang zum fünften Abschnitt bereits bewiesen.)

2) Wenn von zwei einander zugeordneten harmonischen Strahlen der eine den von den beiden andern gebildeten Winkel halbirt, so stehen sie senkrecht auf einander.

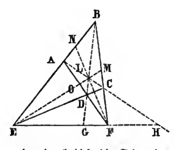
Erklärung.



Wenn man die Seiten eines Vierecks verlängert, so entstehen außer den schon vorhandenen vier Schnittpunkten im Allgemeinen noch zwei neue. Die so erweiterte Figur heißt **vollständiges Vierseit**, und die sechs Schnittpunkte bilden seine Ecken. Ein vollständiges Vierseit hat drei Diagonalen, nämlich die Verbindungslinien zwischen je zweien der Ecken.

Lehrsatz 6.

In einem vollständigen Vierseit ABCDEF theilen sich die Diagonalen EH, AH und BG gegenseitig harmonisch.



Der Beweis erhellt unmittelbar aus Lehrs. 4, Zus. 1 und Zus. 2, denn in dem Dreieck EFB sind EC, AF und BG Transversalen, die sich in Punkt D schneiden und AC verbindet die Fußpunkte A und E, folglich wird EF in G und H harmonisch getheilt u. s. w.

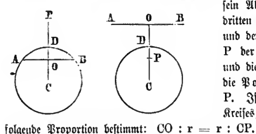
Zusatz.

Zieht man aus E und F durch L die Transversalen EM und FN, so werden durch diese die Seiten des Vierseits harmonisch geschnitten. Die Seite AF z. B. durchschneidet die harmonischen Strahlen EB, EL, ED und EG, und wird also von ihnen in den Punkten A, O, D, F harmonisch geschnitten.

C. Pol und Polare.

Erklärung.

Wenn man aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf eine Gerade AB eine Senkrechte CO fällt, und auf letzterer einen Punkt P so bestimmt, daß sein Abstand von C gleich der dritten Proportionallinie zu CO und dem Halbmesser ist, so heißt P der zu AB gehörige Pol, und die Gerade AB selbst heißt die Polare in Beziehung auf P. Ist r der Halbmesser des Kreises, so wird also P durch folgende Proportion bestimmt: $CO : r = r : CP$.



Zusatz.

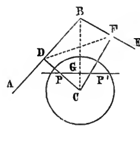
Schneidet die Polare den Kreis, so liegt der Pol außerhalb des Kreises; trifft die Polare den Kreis nicht, so liegt der Pol innerhalb des Kreises; berührt die Polare den Kreis, so fällt der Pol mit dem Berührungspunkte zusammen.

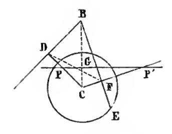
Lehrsatz 1.

Der Durchschnittspunkt der Polaren zweier beliebiger Punkte P und P′ ist der Pol der Verbindungslinie PP′ dieser Punkte.

Beweis.

Man ziehe DF und CB. Nun ist $CD : r = r : CP$, und $CF : r = r : CP'$ (V.); also auch $CD \times CP = r^2 = CF \cdot CP'$, oder $CD : CF = CP' : CP$. Die Dreiecke CPP′ und CDF sind also ähnlich und mithin W. CDF = W. CP′P. Da nun ferner CDBF ein Kreisviereck §. 146, b), so ist W. CDF = W. CBF (§. 146, 1), mithin auch W. CP′P =





W. CBF, und folglich die Dreiecke CP'G und CBF ähnlich. Also auch W. CGP' = W. CFB = 1 R, und mithin CB senkrecht auf PP'. Aus der Aehnlichkeit der beiden letzteren Dreiecke folgt aber auch,

daß $CP' : CB = CG : CF$,
also auch $CP' \times CF = CB \times CG$;
da aber $CP' \times CF = r^2$ (B.), so
ist auch $CB \times CG = r^2$,

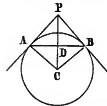
d. h. $CG : r = r : CB$; mithin ist B der Pol zu PP'.

Zusatz.

Liegen mehrere Punkte in Einer Geraden, so durchschneiden sich ihre Polaren alle in dem Pol jener Geraden und umgekehrt: haben mehrere Gerade einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, so liegen ihre Pole in gerader Linie, nämlich in der Polare jenes Durchschnittspunktes.

Lehrsatz 2.

Ein Punkt P außerhalb eines Kreises hat zu seiner Polare die Berührungssehne (§. 159, Zus. 2).



Beweis.

Zieht man CP, so steht diese senkrecht auf AB (§. 159, Zus. 1, und §. 55); mithin ist $CD : CB = CB : CP$ (§. 189, 1), oder $CD : r = r : CP$, d. h. AB ist die Polare zu P.

Zusätze.

1) Wenn mehrere Punkte außerhalb des Kreises in gerader Linie liegen, so haben ihre Berührungssehnen einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und umgekehrt: haben mehrere Sehnen eines Kreises einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, so liegen ihre Pole in gerader Linie (Lehrs. 1, Zusatz).

2) Aus dem Lehrsatz ergibt sich eine leichte Methode die Polare eines gegebenen Punkts zu finden. Ist der Punkt P außerhalb des Kreises gegeben, so ziehe man die beiden Tangenten PA und PB an den Kreis und verbinde die Berührungspunkte A und B. Ist aber ein Punkt, z. B. D innerhalb des Kreises gegeben, so ziehe man aus dem Mittelpunkt C durch

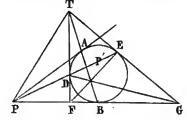
D eine Gerade, durchschneide diese in D durch die senkrechte Sehne AB, und ziehe an A und B die Tangenten AB und BP, so ist die durch ihren Durchschnittspunkt P parallel mit AB gezogene Linie die gesuchte Polare des Punktes D.

Lehrsatz 3.

Eine Kreissehne ED wird durch einen auf ihr (oder ihrer Verlängerung) beliebig genommenen Punkt P und die Polare desselben harmonisch getheilt.

Beweis.

1) Der Punkt P liege außerhalb des Kreises; AB sei seine Polare. Zieht man die Tangenten DT und ET, so fällt ihr Durchschnitt T (der Pol von DE) in die Polare AB von P (Lehrs. 1, Zus.). Zieht man ferner FE und GD, so schneiden sich diese in einem Punkte der Linie TB (A, Lehrs. 4, Zus. 3); also liegen die Punkte P, D, P′, E harmonisch (B, Lehrs. 4, Zus. 1).



2) Der Punkt P′ liege innerhalb des Kreises und PT sei seine Polare. Man verlängere ED bis zum Durchschnitt P mit PT, und ziehe aus P die Tangenten PA und PB an den Kreis, so ist AB die Polare von P (Lehrs. 2) und folglich liegt P′ in AB; nach (1) aber sind die Punkte P, D, P′, E harmonisch.

Zusatz.

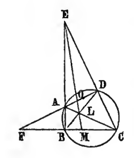
Gehen durch einen Punkt P beliebig viele Sekanten eines Kreises, und sucht man auf jeder Sekante den vierten harmonischen Punkt zu P und den beiden Schnittpunkten mit dem Kreise (letztere als einander zugeordnet betrachtet) so liegen die gefundenen Punkte alle in einer Geraden, nämlich in der Polare von P.

Lehrsatz 4.

Wenn man aus einem beliebigen Punkte F zwei Sekanten nach einem Kreise zieht, die ihn in A, B, D, C treffen und man verbindet diese Punkte durch die Geraden AC und BD, sowie durch

die Geraden BA und CD, so liegen die Durchschnittspunkte E und L dieser Geraden in der Polare des Punktes F.

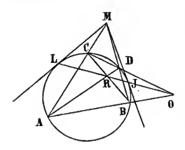
Beweis.



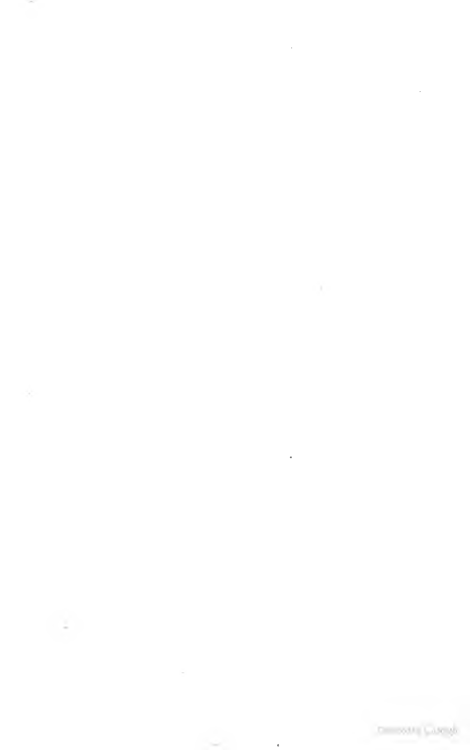
Die Seite AD des Vierseits ABCDEF wird durch die Transversale ELM und den Punkt F harmonisch geschnitten (B, Lehrs. 6, Zus.), d. h. die Punkte F, A, O, D liegen harmonisch. Nun liegen A und D auf der Peripherie des Kreises, also muß der vierte, dem Punkt F zugeordnete Punkt O auf der Polare von F liegen (Lehrsatz 3). Dasselbe gilt auch von dem Punkte M; mithin ist OM, d. h. EM die Polare von F.

Aufgabe.

Es ist ein Punkt M außerhalb eines Kreises gegeben. Man soll blos mit Hilfe des Lineals, eine Tangente aus M an den Kreis ziehen.



Auflösung. Man ziehe die beiden Sekanten MA und MB beliebig, die den Kreis in C, A, D und B treffen. Hierauf ziehe man CD und AB, welche sich in O, und CB und DA, welche sich in R schneiden. Zieht man nun OR, so bestimmt diese auf der Kreislinie zwei Punkte J und L als Berührungspunkte der aus M gezogenen Tangenten.



Druckfehler,

welche der Leser gefälligst verbessern wolle.

S. 2 Zeile 7 von unten lies: Gern statt gegen.
S. 16 Zeile 10 von unten lies: ACB statt BGD.
S. 34 Zeile 2 und 3 von unten lies: Hypotenuse statt Hypothenuse.
S. 76 Zeile 4 von oben lies: A auf G statt G auf J.
S. 76 Zeile 17 von oben lies: Q statt O.
S. 83. In der ersten Figur fehlt O am Durchschnitt HC und FG.
S. 100. In der ersten Figur ist O statt E zu setzen.
S. 110 Zeile 1 von unten lies: fünf statt sechs.
S. 139 Zeile 12 von unten lies: DE—DB statt DE=EB.
S. 144 Zeile 1 von unten und S. 145 Zeile 1 von oben und 13 von oben lies: DG statt CG.
S. 153 Zeile 1 und 2 von oben lies: a, g, h, x statt A, G, H und X.
S. 188 Zeile 11 von oben lies: BMH=MDCB statt BPH=MDCP.
S. 220 Zeile 11 von oben lies: BD′ : AD′ statt BD′ : AD.
S. 222 Zeile 12 von unten lies: BD′ : AD′ statt BD′ : AD.

Verzeichniß der Schul- und Lehrbücher

des

A. Kröner'schen (früher A. Becher'schen) Verlages

in Stuttgart.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Arndt, Dr. **Jul.,** Lehrbuch der **elementaren Planimetrie.** Zum Schul- und Selbstgebrauch. 2te Ausgabe. 1862. Mit zahlreichen Holzschnitten. gr. 8. geh. 6 Bogen. 7½ ngr. od. 27 kr.

Belanger, J. B., Grundlehren der **ebenen Trigonometrie,** analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung. Mit 111 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Deutsch durch Dr. B. Gugler, Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart. 1847. gr. 8. geh. 12 Bogen. 22½ ngr. od. 1 fl. 12 kr.

Bland, Miles, algebraische Aufgaben des ersten und zweiten Grades. Bearbeitet von Dr. Chr. Hr. Nagel, Rektor der Realanstalt in Ulm. 1847. gr. 8. geh. 41 Bogen. 1 thlr. 6 ngr. oder 2 fl.

Böklen, Dr. **Otto, analytische Geometrie** des Raumes, enthaltend die allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Kurven und der Linien auf den Flächen; die Eigenschaften der (homofokalen) Flächen zweiten Grades und der Linien auf denselben. Mit Figuren und Holzschnitten. 1861. gr. 8. geh. 14 Bogen. 1 thlr. od. 1 fl. 48 kr.

— —, Lehrbuch der **Trigonometrie** für den Schul- und Selbstgebrauch, mit zahlreichen Holzschnitten. 1864. gr. 8. geh. 7 Bogen. 27 ngr. od. 1 fl. 30 kr.

Finck, P., Oberlieutenant, die **Situations- und Terraindarstellung** auf dem Standpunkt des neuesten Fortschrittes. Mit 2 Figurentafeln und mehreren Holzschnitten, nebst einem Anhang, „das Lithographiren von Planen betreffend". 1863. gr. 8. geh. 7 Bogen. 1 thlr. od. 1 fl. 48 kr.

Fink, P., Oberlieutenant, das **geographische Kartenzeichnen**. Zum Gebrauche für Realschulen und Gymnasien 1863. gr. 8. geh. 2½ Bog. 5 ngr. od. 18 kr.

— —, das **militärische Krokiren** im Felde. 1863. gr. 8. geh. 4¾ Bgn. 18 ngr. od. 1 fl. 6 kr.

Haupp, Professor am Gymnasium zu Stuttgart, **lateinische Anthologie** für Anfänger. 2te verbesserte Auflage. 1864. geh. 8. Bogen. 15 ngr. od. 54 kr.

Hänel, Gust. A., Professor an der polytechnischen Schule zu Stuttgart, **Constructionslehre** für Ingenieure. Ein Leitfaden für polytechnische Schulen und zum Selbststudium im Strassen-, Eisenbahn- und Wasserbaufache. Erste Lieferung mit Atlas. 1861. gr. 8. geh. 4½ Bogen Text mit Atlas von 19 Tafeln. 2 thlr. 7½ ngr. od. 3 fl. 36 kr.

— —, Zweite Lief. Text. 1863. gr. 8. geh. 6 Bogen. 22½ ngr. od. 1 fl. 15 kr.

Kauffmann, E. F., Professor am Gymnasium zu Stuttgart, Lehrbuch der **Stereometrie**. Zum Gebrauche beim Unterrichte in Realschulen und Gymnasien, sowie zum Selbstunterrichte. Dritte Auflage. 1862. 8. geh. 12 Bogen mit 80 Holzschnitten. 22½ ngr. od. 1 fl. 12 kr.

La Frémoire's Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der **Elementar-Geometrie** (Planimetrie und Stereometrie). Bearbeitet von E. F. Kauffmann und Dr. C. G. Reuschle. Mit ca. 400 Abbildungen. 2te Ausgabe. 1862. 8. geh. 19 Bogen. 1 thlr. 6 ngr. od. 2 fl.

Lamotte, M. L., das **Linearzeichnen** und die Elemente der geometrischen Zeichnenkunst. Für deutsche Lehranstalten bearbeitet von E. F. Kauffmann. Mit 21 Kupfertafeln in Folio. 1835. gr. 8. 8 Bogen Text. 1 thlr. 22½ ngr. od. 3 fl.

Leroy, C. F. A., die **darstellende Geometrie** (Géométrie descriptive). Mit 62 Kupfertafeln. Deutsch mit Anmerkungen von E. F. Kauffmann. 2te Aufl. 1853. gr. 4. geh. 39½ Bogen. 4 thlr. od. 6 fl. 36 kr.

— —, **Stereotomie** (Lehre vom Körperschnitte), enthaltend: die Anwendung der darstellenden Geometrie auf die Schattenlehre, Linearperspective, Gnomonik, den Steinschnitt und die Holzverbindungen, mit einem Atlas von 74 Tafeln in gr. Folio. Bearbeitet von E. F. Kanffmann. 2te Ausgabe. 1861. Text in gr. 4. geh. 51 Bogen. 4½ thlr. od. 8 fl. 6 kr.

Leroy, C. F. A., der **Steinschnitt**. Besonderer Abdruck aus dessen Stereotomie. Mit einem Atlas von 32 Tafeln in gr. Folio. Bearbeitet von E. F. Kauffmann. 1847. gr. 4. geh. 16¾ Bogen. 2 thlr. od. 3 fl. 30 kr.

— —, die **Holzverbindungen**. Besonderer Abdruck aus dessen Stereotomie. Mit einem Atlas von 10 Tafeln in gr. Folio. Bearbeitet von E. F. Kauffmann. 1847. gr. 4. geh. 7¾ Bogen Text. 2 thlr. od. 3 fl. 36 kr.

— —, Theorie und graphische Darstellung der **ebenen und sphärischen Epicycloiden**. Bearbeitet von E. F. Kauffmann. 1850. gr. 4. geh. 6½ Bogen und 8 Tafeln. 21 ngr. od. 1 fl. 12 kr.

Müller, Chr., Professor an der polytechnischen Schule zu Stuttgart, **Constructionslehre** der Maschinentheile nebst Resultaten für den Maschinenbau. Ein Unterrichts- und Handbuch für technische Lehranstalten und Techniker. 3 Lieferungen mit colorirtem Atlas von 34 Tafeln. 1862—65. gr. 8. geh. 20 Bogen. 4 thlr. 12 ngr. od. 7 fl. 21 kr.

Nagel, Dr. **Chr. Heinr.**, Rector der Realanstalt in Ulm. Lehrbuch der **Naturlehre** für Real- und Gymnasialanstalten. 1ste Abtheilung: **Allgemeine Naturlehre.** Dritte verbesserte Auflage. Mit 12 Steintafeln. 1847. gr. 8. geh. $14\frac{1}{2}$ Bogen. 24 ngr. od. 1 fl. 30 kr.

Dasselbe, 2te Abtheilung: **Industrielle Physik.** Mit 10 Steintafeln. 1847. gr. 8. geh. $16\frac{1}{2}$ Bogen. 1 thlr. od. fl. 1. 36 kr.

— —, **Theorie der periodischen Decimalbrüche** nebst Tabellen zur leichten Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. 1845. gr. 8. geh. $9\frac{1}{2}$ Bogen. 24 ngr. od. 1 fl. 30 kr.

Reinsch, Dr. **H.**, Rektor in Erlangen, Taschenbuch der **Flora von Deutschland** nach Linné'schem Systeme und Koch'scher Pflanzenbestimmung zum Gebrauche für botanische Excursionen bearbeitet. 2te Ausgabe. 1862. Taschenformat. geh. 19 Bogen. 15 ngr. od. 54 kr.

Reuschle, Dr. **C. G.**, Professor am Gymnasium zu Stuttgart. Lehrbuch der **Arithmetik** mit Einschluß der sogenannten Algebra. 1845. 8. geh. $41\frac{1}{2}$ Bogen. 2 thlr. 12 ngr. od. 3 fl. 48 kr.

— —, Erster Theil. Arithmetik. geh. 1 thlr. 4 ngr. od. 1 fl. 48 kr.

— —, Zweiter Theil. Algebra. geh. 1 thlr. 8 ngr. od. 2 fl.

Riedel, Hauptmann im württemb. Ingenieurcorps, **niedere Mathematik** für Fortbildungs- und Gewerbeschulen, sowie für Unteroffiziere technischer Waffen. 1861. 8. geh. 11 Bogen. 20 ngr. od. 1 fl. 12 kr.

Rinne, Dr. **J. K.**, Oberlehrer am Stiftsgymnasium zu Zeitz, theoretische deutsche Stillehre. I. Theils 1s Buch. **Die Lehre vom deutschen Stile.** 1840. Lex.-8. geh. 34 Bogen. 27 ngr. od. 1 fl. 15 kr.

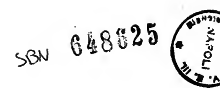
— —, I. Theils 2s Buch. **Theoretisch deutsche Idealstyllehre** 1845. Lex.-8. geh. 41 Bogen. 2 thlr. 18 ngr. od. 4 fl.

— —, Desselben Werkes I. Theiles 3s und letztes Buch. **Theoretisch deutsche Realstillehre.** 1847. Lex.-8. geh. $25\frac{1}{2}$ Bogen. 1 thlr. 15 ngr. od. 2 fl. 30 kr.

— —, praktische **Dispositionslehre** in neuer Gestaltung und Begründung, oder kurzgefaßte Anweisung zum Disponiren deutscher Aufsätze nebst zahlreichen Beispielen und Materialien zum Gebrauch für Lehrer und Schüler in den oberen Classen höherer Schulanstalten. 1862. Lex.-8. geh. $11\frac{1}{2}$ Bogen. 27 ngr. od. 1 fl. 30 kr.

— —, **Organismus der Stil- oder Aufsatzlehre**; ein Handbuch für den theoretischen deutschen Stilunterricht zunächst auf Gymnasien, sowie auf anderen höheren Unterrichtsanstalten. 2. Ausgabe. 1860. Lex.-8. brosch. 8 Bog. 1 thlr. od. 1 fl. 48 kr.

— —, **methodisch-praktische Stil- oder Aufsatzlehre** für alle Stufen des Gymnasialunterrichtes, sowie für den Selbstgebrauch. 2te Ausg. 1860. Lex.-8. $21\frac{1}{2}$ Bogen. 1 thlr. od. 1 fl. 48 kr.


SBN 648525







